XX. reál- és humántudományi Erdélyi Tudományos Diákköri Konferencia (ETDK)
Kolozsvár, 2017. május 18–21.

Preinjektív Kronecker-modulusok bővítési szorzata

Szerző:
Borbély Andor
Babeş–Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár, Matematika és Informatika Kar, informatika szak, alapképzés, III. év

Témavezető:
dr. Szöllősi István egyetemi adjunktus,
Babeş–Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár, Matematika és Informatika Kar, Magyar Matematika és Informatika Intézet

Bevezetés

A Kronecker-modulusok a Kronecker-tegez útalgebrája fölötti, végesen generált modulusok. Az 1. fejezet röviden összefoglalja a Kronecker-modulusok fogalmának megértéséhez szükséges tudnivalókat.

A bővítési szorzat a modulusok között felírható rövid egzakt sorok létezési feltételét adja meg, amit bonyolult, de érdekes kombinatorikus szabályokkal lehet leírni. A 2. fejezetben bemutatjuk a preinjektív Kronecker-modulusok bővítési szorzatának kombinatorikáját, magyarázatokkal, szemléltető példákkal. A bővítési szorzat kiszámítására egy új algoritmust fejlesztettünk ki, ami hatékonyabb a [12] cikkben közölt algoritmusnál. Az algoritmus bemutatására a 2.2. alfejezetben kerül sor. Külön érdekesség, hogy a preinjektív Kronecker-modulusok esetén a bővítési szorzat kiszámítására használt módszer egy lehetséges általánosítása az (egész számok esetén használatos) rendezési algoritmusoknak.

A 3. fejezetben a Kronecker-modulusok bővítési szorzatának egy lehetséges alkalmazását mutatjuk be a résznyalábprobléma által. A résznyalábprobléma kontrollelméletben fontos, általános esetben egyelőre megoldatlan kérdés, mérnöki alkalmazásokkal. A résznyalábprobléma könnyen és természetes módon megfogalmazható a Kronecker-modulusok bővítési szorzatának nyelvén, lehetővé téve a kérdés reprezentációelméleti megközelítését. A bővítési szorzat tulajdonságainak feltárása a résznyalábprobléma teljes megoldásához vezetett, egy sajátos esetben (lásd [11]).

1. fejezet

Kronecker-modulusok

Legyen K két csúcsból és két irányított élből álló úgynevezett **Kronecker-tegez** (a tegez egy olyan irányított multigráf, ahol két csomópont között több irányított él is lehet, illetve hurkok létezése is megengedett):

$$K: \ 1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\leftleftarrows}} 2$$

1.1. Definíció. Legyen Q egy tegez és a, b csomópontok. Egy $\ell \geq 1$ hosszúságú út a-ból b-be egy olyan $(a \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell \mid b)$ élsorozat, ahol minden α_i élre igaz, hogy az α_i nyíl eleje egybeesik az α_{i+1} nyíl végével. Minden a csomóponthoz hozzárendelünk egy $\ell = 0$ hosszúságú utat, a triviális vagy stacionárius utat.

Jelöljön κ egy tetszőleges testet. Egy κ-**algebra** egy olyan κ fölötti vektortér, amin értelmezett egy vektorok közötti szorzás, ami disztributív a vektorok összeadására nézve és kompatibilis skalárral való szorzással.

1.2. Definíció. A Q tegez κQ **útalgebrája** egy olyan κ-algebra, ahol a κ-vektortérnek a bázisát az $(a \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell \mid b)$, $\ell \geq 0$ utak alkotják és ahol két bázisvektor szorzata a megfelelő utak összetevését jelenti. Vagyis az $(a \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell \mid b)$ és $(c \mid \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k \mid d)$ utak szorzata

$$\begin{aligned}(a \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell \mid b)(c \mid \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\ell \mid d) = \\ = \delta_{bc}(a \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k \mid d)\end{aligned}$$

ahol $\delta_{bc} = \begin{cases} 1 & \text{ha } b = c \\ 0 & \text{ha } b \neq c \end{cases}$ a Kronecker-delta.

A Kronecker-algebra izomorf a K Kronecker-tegez útalgebrájával. A Kronecker-tegezben a következő utak vannak: α, β, ε_1 és ε_2 (ahol az utolsó kettő a csúcsokhoz rendelt stacionárius utat jelenti). Az utak összetevése a következő szorzótáblát eredményezi a kK algebrában:

$\cdot$	ε_1	ε_2	α	β
ε_1	ε_1	0	0	0
ε_2	0	ε_2	α	β
α	α	0	0	0
β	β	0	0	0

1.3. Példa. Legyen $\kappa = \mathbb{Q}$ és $v_1, v_2 \in \mathbb{Q}K$, ahol $v_1 = 3\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \frac{1}{2}\alpha$, $v_2 = 2\varepsilon_2 + \alpha + 2\beta$. Ekkor $2v_1 + v_2 = 6\varepsilon_1 + 2\beta$ és $v_1 v_2 = \left(3\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \frac{1}{2}\alpha\right)(2\varepsilon_2 + \alpha + 2\beta) = -2\varepsilon_2 - \alpha - 2\beta$.

A $\mathbb{Q}K$ útalgebra tehát egy olyan $\mathbb{Q}$-feletti vektortér, ahol a vektorok közötti szorzást az előbbi táblázat szabályai szerint végezzük (a táblázat a kanonikus bázisvektorok szorzását adja meg, ami teljesen meghatározza a műveletet). A szorzás semleges eleme $\mathbf{1} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ (általában igaz: a útalgebrában a szorzás semleges eleme a stacionárius utak összege).

1.4. Definíció. A Kronecker-modulus egy véges dimenziós modulus a Kronecker-algebra fölött. Jelölje mod-kK a Kronecker-modulusok halmazát.

Észrevétel. A modulosok a vektorterek általánosításai, ahol a skalárok nem (feltétlenül) egy test, hanem egy gyűrű elemei. Mivel az algebra egy olyan vektortér, amin egy szorzást is értelmeztünk, és ez a szorzás disztributív az összeadásra nézve, minden algebra egy gyűrű is egyben. Ennek a gyűrűnek elemei lesznek a modulus "skalárjai".

1.5. Példa. Legyen $M \in$ mod-$\mathbb{Q}K$ egy 3 dimenziós modulus $\mathbb{Q}K$ fölött. Ekkor létezik M-nek egy $E = (e_1, e_2, e_3)$ bázisa. Legyen $r, r' \in M$, $r = v_1 e_1 + v_2 e_2$ és $r' = v'_1 e_1 + v'_2 e_2 + v'_3 e_3$, ahol $v_1, v_2 \in \mathbb{Q}K$ úgy van megadva, mint a 1.3. példában, a többi skalár pedig: $v'_1 = \alpha + \beta$, $v'_2 = \varepsilon_1 + 2\beta$, $v'_3 = 2\varepsilon_2 + \alpha - \beta$, $v'_1, v'_2, v'_3 \in \mathbb{Q}K$. Akkor $r + r' = (v_1 e_1 + v_2 e_2) + (v'_1 e_1 + v'_2 e_2 + v'_3 e_3) = v_1" e_1 + v_2" e_2 + v'_3 e_3$, ahol $v_1" = v_1 + v'_1 = 3\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \frac{1}{2}\alpha + \beta$ és $v_2" = v_2 + v'_2 = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \alpha + 4\beta$.

M dimenziója $\mathbb{Q}K$ fölötti modulusként 3, amit így jelölhetünk $\dim_{\mathbb{Q}K} M = 3$. Ugyanakkor tekinthetünk M-re úgy is, mint egy $\mathbb{Q}$ fölötti vektortérre. Ekkor a dimenziója 12 (mivel minden egyes skalár egy négydimenziós vektortér eleme). Ezt így jelöljük: $\dim_{\mathbb{Q}} M = 12$.

1.6. Definíció. Egy véges dimenziójú modulust a Kronecker-algebra felett **Kronecker-modulus**nak nevezünk. Jelölje mod-κK a Kronecker-algebra feletti véges dimenziójú jobb oldali modulusok osztályát.

1.7. Definíció. Egy (véges dimenziójú) κ-lineáris reprezentációja a K tegeznek $(V_1, V_2; \varphi_\alpha, \varphi_\beta)$, ahol V_1, V_2 véges dimenziójú κ-vektorterek (megfelelve a csúcsoknak) és $\varphi_\alpha, \varphi_\beta : V_2 \to V_1$ egy-egy κ-lineáris leképezés (megfeleltetve az éleknek).

Tehát egy κ-lineáris reprezentációja K-nak vektortereket rendel a csúcsokhoz és megfelelő κ-lineáris függvényeket – vagy ekvivalens módon, mátrixokat – az élekhez.

1.8. Definíció. Adott két $M = (V_1, V_2; \varphi_\alpha, \varphi_\beta)$ és $M' = (V_1', V_2'; \varphi_\alpha', \varphi_\beta')$ reprezentáció. Egy **morfizmus**t M és M' között egy pár κ-lineáris függvénnyel lehet megadni: $f = (f_1, f_2)$, ahol $f_1 : V_1 \to V_1'$ és $f_2 : V_2 \to V_2'$ úgy, hogy a következő diagram kommutatív (azaz $f_1\varphi_\alpha = \varphi'_\alpha f_2$ és $f_1\varphi_\beta = \varphi'_\beta f_2$):

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \overset{\varphi_\alpha}{\underset{\varphi_\beta}{\leftleftarrows}} & V_2 \\ {\scriptstyle f_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_2} \\ V_1' & \overset{\varphi'_\alpha}{\underset{\varphi'_\beta}{\leftleftarrows}} & V_2' \end{array} .$$

Reprezentációelméletből ismert tény, hogy a modulusok és a tegezek reprezentációi kölcsönösen (és egyértelműen) megfeleltethetők egymásnak. Ezért a továbbiakban a Kronecker-modulusokat a Kronecker-tegez reprezentációival fogjuk azonosítani. Egy $M \in \text{mod-}\kappa K$ modulus esetén a következő jelölést is használhatjuk: $M = V_1 \overset{\varphi_\alpha}{\underset{\varphi_\beta}{\leftleftarrows}} V_2$ vagy $M = V_1 \overset{[\varphi_\alpha]}{\underset{[\varphi_\beta]}{\leftleftarrows}} V_2$, ahol $[\varphi_\alpha]$ és $[\varphi_\beta]$ a φ_α és φ_β lineáris leképezések mátrixai valamilyen bázisban.

A következőkben összeállítjuk a definícióknak és közismert tényeknek egy rövid gyűjteményét a Kronecker-modulusokkal kapcsolatosan. A számítások, indoklások és bizonyítások amelyek ezekhez az eredményekhez vezetnek számos algebrakönyvben megtalálhatóak (reprezentációelmélet, lásd például [1, 2, 6, 7]).

Az **egyszerű**[1] **Kronecker-modul**usok (az izomorfizmus erejéig) a következők

$$S_1 : \kappa \leftleftarrows 0 \quad \text{és} \quad S_2 : 0 \leftleftarrows \kappa.$$

Egy $M = V_1 \overset{\varphi_\alpha}{\underset{\varphi_\beta}{\leftleftarrows}} V_2$ Kronecker-modulusnak a **dimenzió**ja (vagy **dimenzióvektor**a) $\underline{\dim} M = (\dim_\kappa V_1, \dim_\kappa V_2)$.

Egy $M \in \text{mod-}\kappa K$ felbonthatatlan modulus a következő három család valamelyikének tagja: preprojektív-, reguláris- és preinjektív család.

A **felbonthatatlan preprojektív Kronecker-modulus**ok az izomorfizmus erejéig meghatározottak a dimenzió vektorjuk által. Adott $n \in \mathbb{N}$ természetes szám esetén jelöljük P_n-nel a felbonthatatlan preprojektív modulust, aminek a dimenziója $\underline{\dim} P_n = (n+1, n)$. Tudjuk, hogy (izomorfizmus erejéig) $P_n = (\kappa^{n+1}, \kappa^n; f, g)$, ahol a kanonikus bázisban felírva a lineáris függvények mátrixait, az $f : \kappa^n \to \kappa^{n+1}$ mátrixa $\begin{pmatrix} E_n \\ 0 \end{pmatrix}$ alakú (illetve

[1]nincs valódi részmodulusa

$g : \kappa^n \to \kappa^{n+1}$ esetén $\begin{pmatrix} 0 \\ E_n \end{pmatrix}$). Így ez esetben

$$P_n : \kappa^{n+1} \underset{\left(\begin{smallmatrix} E_n \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}{\overset{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ E_n \end{smallmatrix}\right)}{\leftleftarrows}} \kappa^n ,$$

ahol E_n az n-ed rendű egységmátrix.

Preprojektív Kronecker-modulusnak nevezzük a felbonthatatlan preprojektív modulusok direkt összegét: $P = P_{a_1} \oplus P_{a_2} \oplus \cdots \oplus P_{a_l}$, ahol általában növekvő sorrendben tüntetjük fel a paramétereket: $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_l$.

A **felbonthatatlan preinjektív Kronecker-modulus**ok is izomorfizmus erejéig meghatározottak a dimenzió vektorjuk által. Adott $n \in \mathbb{N}$ esetén jelöljük I_n-nel a felbonthatatlan preinjektív modulust, aminek a dimenziója $\underline{\dim} I_n = (n, n+1)$. Tudjuk, hogy (izomorfizmus erejéig) $I_n = (\kappa^n, \kappa^{n+1}; f, g)$, ahol a kanonikus bázisban felírva a lineáris függvények mátrixait, az $f : \kappa^{n+1} \to \kappa^n$ mátrixa $\begin{pmatrix} E_n & 0 \end{pmatrix}$ alakú (illetve $g : \kappa^{n+1} \to \kappa^n$ esetén $\begin{pmatrix} 0 & E_n \end{pmatrix}$)). Ennél fogva

$$I_n : \kappa^n \underset{(0\,E_n)}{\overset{(E_n\,0)}{\leftleftarrows}} \kappa^{n+1} .$$

Preinjektív Kronecker-modulusnak nevezzük a felbonthatatlan preinjektív modulusok direkt összegét: $I = I_{a_1} \oplus I_{a_2} \oplus \cdots \oplus I_{a_l}$, ahol általában csökkenő sorrendbe tüntetjük fel a paramétereket: $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_l$.

A **felbonthatatlan reguláris Kronecker-modulus**ok azok a felbonthatatlan $M \in$ mod-κK modulusok amelyek sem preprojektívek sem preinjektívek. Ha κ algebrailag zárt test (például vagy $\kappa = \mathbb{C}$), akkor a regulárisokat a következő reprezentációkkal lehet azonosítani:

$$R_k(n) : \kappa^n \underset{E_n}{\overset{J_p^{(n)}}{\leftleftarrows}} \kappa^n \text{ minden } k \in \kappa \text{ esetén és } R_\infty(n) : \kappa^n \underset{J_0^{(n)}}{\overset{E_n}{\leftleftarrows}} \kappa^n .$$

ahol $J_k^{(n)} = \begin{pmatrix} k & 1 & & \\ & k & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & k \end{pmatrix}$ egy $n \times n$-es Jordan-blokk. Annak érdekében, hogy egyszerűsítsük a jelöléseket, bevezetjük a következő halmazt: $\mathcal{P} = \{\infty\} \cup \kappa$. Ennek a halmaznak az elemeit egyszerűen pontoknak nevezzük. Így tehát egy reguláris felbonthatatlan $R_p(n)$ alakú, ahol $n \in \mathbb{N}$ és $p \in \mathcal{P}$. A reguláris felbonthatatlan dimenziója $\underline{\dim} R_p(n) = (n, n)$.

Egy $R \in$ mod-κK modulust **reguláris Kronecker-modulus**nak hívunk ha egy direkt összege reguláris felbonthatatlanoknak. Ha $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ egy partíció, akkor használhatjuk a következő jelölést $R_p(\lambda) = R_p(\lambda_1) \oplus R_p(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus R_p(\lambda_m)$.

1.9. Tétel (Krull-Schmidt). *Minden $M \in$ mod-κK modulus a következő módon bontható fel (izomorfizmus erejéig):*

$$M = (P_{c_1} \oplus \cdots \oplus P_{c_n}) \oplus (\oplus_{p \in \mathcal{P}} R_p(\lambda^{(p)})) \oplus (I_{d_1} \oplus \cdots \oplus I_{d_m}),$$

ahol:

- $(c_1, \ldots, c_n)$ *nemnegatív egészek egy véges növekvő sorozata;*
- $\lambda^{(p)} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$ *egy nem nulla számpartíció végesen sok $p \in \mathcal{P}$ pontra;*
- $(d_1, \ldots, d_m)$ *nemnegatív egészek egy véges csökkenő sorozata.*

A $(c_1, \ldots, c_n)$ növekvő és $(d_1, \ldots, d_m)$ csökkenő sorozatok a $\lambda^{(p)}$ partíciókkal együtt az úgynevezett **Kronecker-invariáns**ai az M modulusnak. Következésképpen a Kronecker-invariánsok izomorfizmus erejéig meghatároznak egy $M \in$ mod-κK modulust.

1.10. Példa. Legyen $\kappa = \mathbb{Q}$, akkor $\mathcal{P} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ és egy Kronecker-modulus például $M \in$ mod-$\mathbb{Q}K$, ahol

$$M = P_0 \oplus P_8 \oplus R_0(5) \oplus R_{\frac{1}{2}}(5,3,1,1) \oplus R_\infty(2,2) \oplus I_3 \oplus I_2 \oplus I_1 \oplus I_1.$$

Az M modulust $M = P \oplus R \oplus I$ alakban írtuk fel, ahol $P = P_0 \oplus P_8$ egy preprojektív, $R = R_0(5) \oplus R_{\frac{1}{2}}(5,3,1,1) \oplus R_\infty(2,2)$ egy reguláris, $I = I_3 \oplus I_2 \oplus I_1 \oplus I_1$ pedig egy preinjektív Kronecker-modulus. A P_0, P_8, $R_0(5)$, $R_{\frac{1}{2}}(5)$, $R_{\frac{1}{2}}(3)$, $R_{\frac{1}{2}}(1)$, $R_\infty(2)$, I_3, I_2 illetve I_1 modulusok mindegyike felbonthatatlan, és a regulárisoknál az $(5,3,1,1)$ és $(2,2)$ partíciók esetén használtuk az $R_{\frac{1}{2}}(5,3,1,1) = R_{\frac{1}{2}}(5) \oplus R_{\frac{1}{2}}(3) \oplus R_{\frac{1}{2}}(1) \oplus R_{\frac{1}{2}}(1)$ illetve $R_\infty(2,2) = R_\infty(2) \oplus R_\infty(2)$ jelölést.

1.11. Példa. A továbbiakban csak a preinjektív Kronecker-modulusokkal fogunk foglalkozni, ezért az előző példából csak a preinjektív $I = I_3 \oplus I_2 \oplus I_1 \oplus I_1$ modulust adjuk meg, mint a Kronecker-tegez reprezentációja:

$$I : \kappa^7 \underset{\begin{pmatrix} 0&1&0&0&&&&&&& \\ 0&0&1&0&&&&&&& \\ 0&0&0&1&&&&&&& \\ &&&&0&1&0&&&& \\ &&&&0&0&1&&&& \\ &&&&&&&0&1&& \\ &&&&&&&&&0&1 \end{pmatrix}}{\overset{\begin{pmatrix} 1&0&0&0&&&&&&& \\ 0&1&0&0&&&&&&& \\ 0&0&1&0&&&&&&& \\ &&&&1&0&0&&&& \\ &&&&0&1&0&&&& \\ &&&&&&&1&0&& \\ &&&&&&&&&1&0 \end{pmatrix}}{\leftleftarrows}} \kappa^{11},$$

ami a következő felbonthatatlan reprezentációk direkt összegéből áll elő:

$$I_3 : \kappa^3 \underset{\begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}}{\overset{\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}}{\leftleftarrows}} \kappa^4, \quad I_2 : \kappa^2 \underset{\begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}}{\overset{\begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \end{pmatrix}}{\leftleftarrows}} \kappa^3 \quad \text{és} \quad I_1 : \kappa^1 \underset{(0\ 1)}{\overset{(1\ 0)}{\leftleftarrows}} \kappa^2 \text{ (kétszer).}$$

2. fejezet

A preinjektív Kronecker-modulusok bővítési szorzata

2.1. Definíció. Legyenek $M, X, N \in \mod - \kappa K$ modulusok. **Rövid egzakt sor**nak nevezzük a következő sort:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0\ ,$$

ahol a nyilak homomorfizmusokat jelölnek és a következő feltételek teljesülnek: $\ker f = 0$, $\mathrm{Im} f = \ker g$ és $\mathrm{Im} g = N$.

Észrevétel. A rövid egzakt sor az egzakt sorok sajátos esete. Egy egzakt sor a következő alakú:

$$M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} M_2 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_n} M_n\ ,$$

ahol a nyilak ez esetben is homomorfizmusokat jelölnek és hasonlóan a feltételek sorra teljesülnek: $\mathrm{Im}\,(f_k) = \ker\,(f_{k+1})$. Emiatt a 2.1. Definícióban szereplő függvények közül f injektív, g pedig szürjektív.

2.1. A bővítési szorzat

A következőkben egy $X \in \text{mod-}\kappa K$ modulus izomorfizmusosztályát $[X]$ fogja jelölni.

Definíció. Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ Kronecker-modulusok izomorfizmusosztályait tartalmazó nem üres halmazok. Ezek **bővítési szorzat**a[1]

$$\mathcal{A}{*}\mathcal{B} = \{\, [X] \mid X \in \text{mod-}\kappa K, \exists\, 0 \to N \to X \to M \to 0 \text{ rövid egzakt sor, } [M] \in \mathcal{A}, [N] \in \mathcal{B}\,\}\,.$$

Nagyon fontos tény az, hogy a bővítési szorzat asszociatív, tehát $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ esetén igaz, hogy $(\mathcal{A}{*}\mathcal{B}){*}\mathcal{C} = \mathcal{A}{*}(\mathcal{B}{*}\mathcal{C})$. A szorzatnak semleges eleme is van: $\{[0]\}{*}\mathcal{A} = \mathcal{A}{*}\{[0]\} = \mathcal{A}$, ahol 0 itt a nullmodulust jelöli. Ez a művelet tehát modulusok izomorfizmusosztályainak

[1] Angolul: extension monoid product

halmazát szorozza össze asszociatív módon, és mivel semleges eleme is van, egy monoid struktúrát hoz létre.

Észrevétel. A bővítési szorzatot M. Reineke vezette be általános esetben (lásd [5]).

A Kronecker-modulusok esetében ismert az $\mathcal{A} * \mathcal{B}$ bővítési szorzat azokban az esetekben, amikor $\mathcal{A} = \{[M]\}$ és $\mathcal{B} = \{[N]\}$ egyelemű halmazok, illetve $M, N \in$ mod-κK felbonthatatlan preinjektív-, reguláris- vagy preprojektív Kronecker-modulusok (lásd [8]).

A következőkben csak a preinjektív (vagy duálisan a preprojektív) Kronecker-modulusok bővítési szorzatával fogunk foglalkozni, ezért csak csak preinjektív esetre vonatkozó eredményeket mutatjuk be.

2.2. Tétel ([9])**.** *Felbonthatatlan preinjektív (illetve preprojektív) Kronecker-modulusok esetében a bővítési szorzatot a következő módon lehet megadni:*

- $$\{[I_i]\} * \{[I_j]\} = \begin{cases} \{[I_i \oplus I_j]\} & i \geq j \\ \{[I_j \oplus I_i], [I_{j-1} \oplus I_{i+1}], ..., [I_{j-[\frac{j-i}{2}]} \oplus I_{i+[\frac{j-i}{2}]}]\} & i < j \end{cases};$$

- $$\{[P_i]\} * \{[P_j]\} = \begin{cases} \{[P_i \oplus P_j]\} & i \leq j \\ \{[P_j \oplus P_i], [P_{j+1} \oplus P_{i-1}], ..., [P_{j+[\frac{i-j}{2}]} \oplus P_{i-[\frac{i-j}{2}]}]\} & i > j \end{cases}.$$

Ezek a feltételek nem függnek a κ testtől (lásd [9]).

Látható, hogy két preinjektív felbonthatatlan esetén a bővítési szorzat csak a direkt összeget tartalmazza akkor, ha az első preinjektív dimenziója a nagyobb (vagy egyenlő). Ha a sorrend fordított (vagyis a kisebb dimenziójú szerepel elsőként a szorzatban), akkor minden olyan direkt összeg szerepel a halmazban, amire teljesül, hogy az első tag dimenziója nagyobb vagy egyenlő, mint a második tag dimenziója, a dimenziók összege változatlan és értékeik az eredeti dimenziók által meghatározott korlátok között maradnak. Olyan ez, mintha a preinjektívek esetén a „természetes sorrend" a csökkenő sorrend lenne (dimenzió szerint). Ha a szorzatban növekvő sorrendben szerepelnek a tagok, akkor az eredmény halmazban a csökkenő sorrendbe állított felbonthatatlanokon kívül szereplenek még az említett módon megadott elemek.

Észrevétel. Ez a szabályszerűség úgy is felfogható, mint az egész számok rendezésének egy általánosítása. Ha a 2.2 tételben a preinjektív felbonthatatlanokra vonatkozó szabálynál a $i < j$ ágban csak a halmaz első elemét hagynánk, akkor visszakapnánk a (csökkenő sorrendbe való) rendezést, ha eltekintünk a modulusoktól és csak a dimenzióikat vesszük figyelembe. Ezért, ha egy általános, felbonthatatlan preinjektívekből álló szorzatot nézünk, akkor a bővítési szorzatnak mindig eleme lesz az a preinjektív, amit a felbonthatatlanok direkt összegéből kapunk (csökkenő sorrendbe rendezve dimenzió szerint). A következő példában $[I_8 \oplus I_6 \oplus I_4 \oplus I_3 \oplus I_2] \in \{[I_2]\} * \{[I_6]\} * \{[I_3]\} * \{[I_8]\} * \{[I_4]\}$.

2.3. Példa. Bemutatjuk a bővítési szorzat asszociativitását, vagyis azt, hogy egy elemet megkaphatunk több módon is, attól függetlenül, hogy milyen sorrendben alkalmazzuk a szabályt. Szemléltetésképpen kétféle módon kapjuk meg az $\mathcal{I} = \{[I_2]\} * \{[I_6]\} * \{[I_3]\} * \{[I_8]\} * \{[I_4]\}$ szorzat ugyanazon $[I_6 \oplus I_6 \oplus I_4 \oplus I_4 \oplus I_3] \in \mathcal{I}$ elemét:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \{[I_2]\} * \{[I_6]\} * \big(\{[I_3]\} * \{[I_8]\}\big) * \{[I_4]\} \\
&\supseteq \big(\{[I_2]\} * \{[I_6]\}\big) * \{[I_7]\} * \{[I_4]\} * \{[I_4]\} \\
&\supseteq \{[I_6]\} * \big(\{[I_2]\} * \{[I_7]\}\big) * \{[I_4]\} * \{[I_4]\} \\
&\supseteq \{[I_6]\} * \{[I_6]\} * \big(\{[I_3]\} * \{[I_4]\}\big) * \{[I_4]\} \\
&\supseteq \{[I_6]\} * \{[I_6]\} * \{[I_4]\} * \big(\{[I_3]\} * \{[I_4]\}\big) \\
&\supseteq \{[I_6]\} * \{[I_6]\} * \{[I_4]\} * \{[I_4]\} * \{[I_3]\} \\
&= \{[I_6 \oplus I_6 \oplus I_4 \oplus I_4 \oplus I_3]\}
\end{aligned}$$

Ugyanezt az elemet kihozhatjuk egy másfajta zárójelezéssel is:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \big(\{[I_2]\} * \{[I_6]\}\big) * \{[I_3]\} * \{[I_8]\} * \{[I_4]\} \\
&\supseteq \{[I_6]\} * \{[I_2]\} * \big(\{[I_3]\} * \{[I_8]\}\big) * \{[I_4]\} \\
&\supseteq \{[I_6]\} * \big(\{[I_2]\} * \{[I_8]\}\big) * \{[I_3]\} * \{[I_4]\} \\
&\supseteq \{[I_6]\} * \{[I_6]\} * \{[I_4]\} * \big(\{[I_3]\} * \{[I_4]\}\big) \\
&\supseteq \{[I_6]\} * \{[I_6]\} * \{[I_4]\} * \{[I_4]\} * \{[I_3]\} \\
&= \{[I_6 \oplus I_6 \oplus I_4 \oplus I_4 \oplus I_3]\}
\end{aligned}$$

Észrevétel. Belátható, hogy amint az elemeket cserélgetjük és helyükre rakjuk, az általuk generált lehetséges halmaz egyre kisebb lesz. Ebben a konkrét esetben kezdetben 16 különböző lehetséges végkimenet lehet, majd rendre csak 7, 4, és 1 illetve 11, 7, és 1 a második példa esetén. A sor végén, amikor már kialakult a „természetes sorrend", ennek az eredménye egyetlen (preinjektívekből álló) direkt összeg izomorfizmusosztálya.

2.4. Példa. Egy kisebb példa keretén belül bemutatjuk egy több felbonthatatlan preinjektív bővítési szorzatának a eredményhalmazát.

$$\begin{aligned}
\{[I_4]\} * \{[I_2]\} * \{[I_7]\} * \{[I_3]\} = \{&[I_7 \oplus I_4 \oplus I_3 \oplus I_2], [I_6 \oplus I_5 \oplus I_3 \oplus I_2], [I_6 \oplus I_4 \oplus I_3 \oplus I_3], \\
&[I_5 \oplus I_5 \oplus I_3 \oplus I_3], [I_5 \oplus I_4 \oplus I_4 \oplus I_3]\}
\end{aligned}$$

Észrevétel. A preprojektívek esetén is egy analóg kombinatorikai szabály jellemzi a szorzatot, ami a preinjektív szorzat „tükörképe": preprojektívek esetén a „természetes sorrend" a növekvő. Ezért minden preinjektívekkel kapcsolatos eredmény a preprojektívekre is érvényes a sorrend megfordítása után.

A következő tétel ennek az előbb bemutatott szabályszerűségnek az általánosítása arra az esetre, amikor a szorzatban két preinjektív Kronecker-modulus szerepel:

2.5. Tétel ([10]). *Legyenek $a_1 \geq \dots a_p \geq 0$, $b_1 \geq \dots \geq b_n \geq 0$ és $c_1 \geq \dots \geq c_r \geq 0$ csökkenő sorozatok. Akkor és csak akkor igaz, hogy $[I_{c_1} \oplus \dots \oplus I_{c_r}] \in \{[I_{a_1} \oplus \dots \oplus I_{a_p}]\} * \{[I_{b_1} \oplus \dots \oplus I_{b_n}]\}$, vagy ekvivalens módon, akkor és csak akkor létezik egy*

$$0 \to I_{b_1} \oplus \dots \oplus I_{b_n} \to I_{c_1} \oplus \dots \oplus I_{c_r} \to I_{a_1} \oplus \dots \oplus I_{a_p} \to 0$$

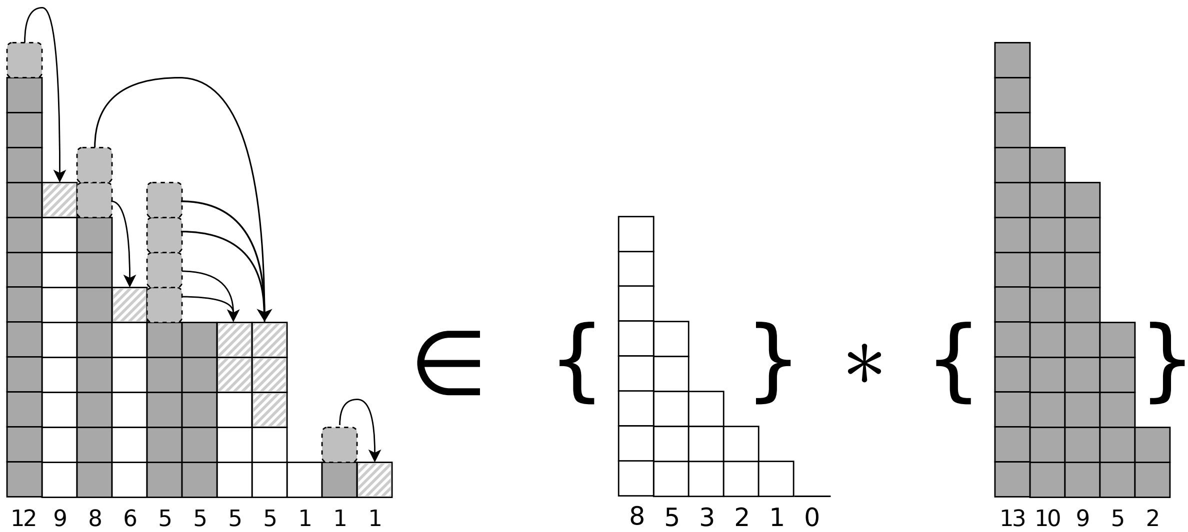
alakú rövid egzakt sor, ha $r = n + p$, $\exists \beta : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n + p\}$, $\exists \alpha : \{1, \dots, p\} \to \{1, \dots, n + p\}$ szigorúan növekvő függvények úgy, hogy $\mathrm{Im}\alpha \cap \mathrm{Im}\beta = \emptyset$ és $\exists m^i_j \geq 0$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$ úgy, hogy $\forall \ell \in \{1, \dots, n + p\}$-re teljesül a következő összefüggés:

$$c_\ell = \begin{cases} b_i - \sum_{\substack{\beta(i)<\alpha(j) \\ 1\leq j\leq p}} m^i_j, \ \textit{where } i = \beta^{-1}(\ell) & \ell \in \mathrm{Im}\beta \\ a_j + \sum_{\substack{\beta(i)<\alpha(j) \\ 1\leq i\leq n}} m^i_j, \ \textit{where } j = \alpha^{-1}(\ell) & \ell \in \mathrm{Im}\alpha \end{cases}.$$

Az előbbi tétel a következő szabályszerűséget fogalmazza meg: ha adott két preinjektív Kronecker-modulus, akkor a bővítési szorzatban megjelenő modulusokat egy partíció-kombinatorikai szabály határozza meg (a κ testtől függetlenül). Az első részben rögzített konvenciót használva a preinjektív felbonthatatlanok direkt összegében a tagokat csökkenő sorrendben írjuk, ezért a két preinjektív modulust könnyen azonosíthatjuk a megfelelő partíciókkal. Azonosítsuk a tételben szereplő $I_{a_1} \oplus \dots \oplus I_{a_p}$ modulust az $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ partícióval és a $I_{b_1} \oplus \dots \oplus I_{b_n}$ modulust a $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ partícióval. Grafikus ábrázolásban a $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ partíció elemeit oszlopokba rendezett fehér négyzetekkel-, a $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ partíció elemeit pedig szürke négyzetekkel jelöljük. A tétel azt mondja ki, hogy a bővítési szorzatban szereplő modulusokat olyan $(c_1, c_2, \dots, c_r)$ partíciókkal azonosíthatjuk, amiket a szürke és a fehér partíciók egyfajta „általánosított" összefésüléséből kapunk. Összefésülés közben a szürke partíció oszlopaiból négyzeteket ejthetünk a fehér partíció oszlopaira, de mindig csak olyan fehér oszlopokra, amit az adott szürkék megelőztek az összefésülés során (balról jobbra való mozgásuk közben). A tételben szereplő α és β függvények a fehér illetve szürke partíciók oszlopainak pozícióját adják meg az eredmény partíción belül. A szigorúan növekvő monotonitás és a diszjunkt képek az összefésülés matematikai jellemzése, az m^i_j értékek pedig megadják azt, hogy hány négyzet került át az i-edik szürke oszlopról a j-edik fehér oszlopra. Minden, ezzel a módszerrel kapott csökkenő sorozat egy olyan partíciót fog megadni, amit azonosíthatunk a bővítési monoid szorzatban szereplő preinjektív valamelyik Kronecker-modulussal és minden ilyen ilyen modulus megkapható ezzel a módszerrel.

A következő példában grafikusan is bemutatjuk az előbbi szabályt.

2.6. Példa. Legyenek $I_8 \oplus I_5 \oplus I_3 \oplus I_2 \oplus I_1 \oplus I_0$ és $I_{13} \oplus I_{10} \oplus I_9 \oplus I_5 \oplus I_2$ preinjektív Kronecker-modulusok. $[I_{12} \oplus I_9 \oplus I_8 \oplus I_6 \oplus I_5 \oplus I_5 \oplus I_5 \oplus I_5 \oplus I_1 \oplus I_1 \oplus I_1] \in \{[I_8 \oplus I_5 \oplus I_3 \oplus I_2 \oplus I_1 \oplus I_0]\} * \{[I_{13} \oplus I_{10} \oplus I_9 \oplus I_5 \oplus I_2]\}$, vagy ekvivalens módon létezik a $0 \to I_{13} \oplus I_{10} \oplus I_9 \oplus I_5 \oplus I_2 \to I_{12} \oplus I_9 \oplus I_8 \oplus I_6 \oplus I_5 \oplus I_5 \oplus I_5 \oplus I_5 \oplus I_1 \oplus I_1 \oplus I_1 \to I_8 \oplus I_5 \oplus I_3 \oplus I_2 \oplus I_1 \oplus I_0 \to 0$ rövid egzakt sor, mert a (12, 9, 8, 6, 5, 5, 5, 5, 1, 1, 1) partíció megkapható a (8, 5, 3, 2, 1, 0) fehér- és (13, 10, 9, 5, 2) szürke partíciókból az általánosított összefésülés segítségével. A 2.5 tétel jelöléseit használva $p = 6$, $n = 5$, $r = 11$ és a szigorúan növekvő függvények $\beta : \{1, \ldots, 5\} \to \{1, \ldots, 11\}$ a következő értékekkel : $\beta(1) = 1$, $\beta(2) = 3$, $\beta(3) = 5$, $\beta(4) = 6$, $\beta(5) = 10$ és $\alpha : \{1, \ldots, 6\} \to \{1, \ldots, 11\}$ a $\alpha(1) = 2$, $\alpha(2) = 4$, $\alpha(3) = 7$, $\alpha(4) = 8$, $\alpha(5) = 9$, $\alpha(6) = 11$értékekkel. Az m_j^i értékeknek ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$) pedig választhatjuk: $m_1^1 = m_2^2 = m_4^2 = m_6^5 = 1$, $m_3^3 = m_4^3 = 2$ illetve $m_j^i = 0$ az összes többi esetben.



Észrevétel. Ugyanezt az eredmény-partíciót (általában) megkaphatjuk többfajta módon is: különbözhetnek az m_j^i értékek illetve az α és β függvények is. A 2.8 példában ugyanazon partíciót más m_j^i értékekkel és a szürke meg fehér oszlopok más sorrendjével kaptuk meg.

A következő tétel egy erősebb állítást fogalmaz meg. Nemcsak kijelenti az α és β függvények létezését, hanem egy szerkesztést is ad ezekre. Ennek alapján algoritmizálhatóvá válik a bővítési szorzat elemeinek generálása, ahogy az később látni fogjuk.

2.7. Tétel ([10])**.** *Legyenek $a_1 \geq \ldots a_p \geq 0$, $b_1 \geq \cdots \geq b_n \geq 0$, $c_1 \geq \cdots \geq c_r \geq 0$ csökkenő sorozatok és $B_j = \{l \in \{0, \ldots, n\} | \sum_{k=1}^{l} b_k + \sum_{k=1}^{j} a_k \geq \sum_{k=1}^{l+j} c_k\}$ minden $1 \leq j \leq p$-re. Akkor és csak akkor igaz, hogy $[I] \in \{[I_{a_1} \oplus \cdots \oplus I_{a_p}]\} * \{[I_{b_1} \oplus \cdots \oplus I_{b_n}]\}$ (vagy ekvivalens módon akkor és csakis akkor létezik egy*

$$0 \to I_{b_1} \oplus \cdots \oplus I_{b_n} \to I \to I_{a_1} \oplus \cdots \oplus I_{a_p} \to 0$$

alakú rövid egzakt sor), ha $[I] = [I_{c_1} \oplus \cdots \oplus I_{c_r}]$, $r = p + n$, $\sum_{i=1}^{r} c_i = \sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$, $B_j \neq \emptyset$, $a_j \leq c_{\alpha_j}$ és $b_i \geq c_{\beta_i}$ minden $1 \leq j \leq p$ és $1 \leq i \leq n$ értékre, ahol

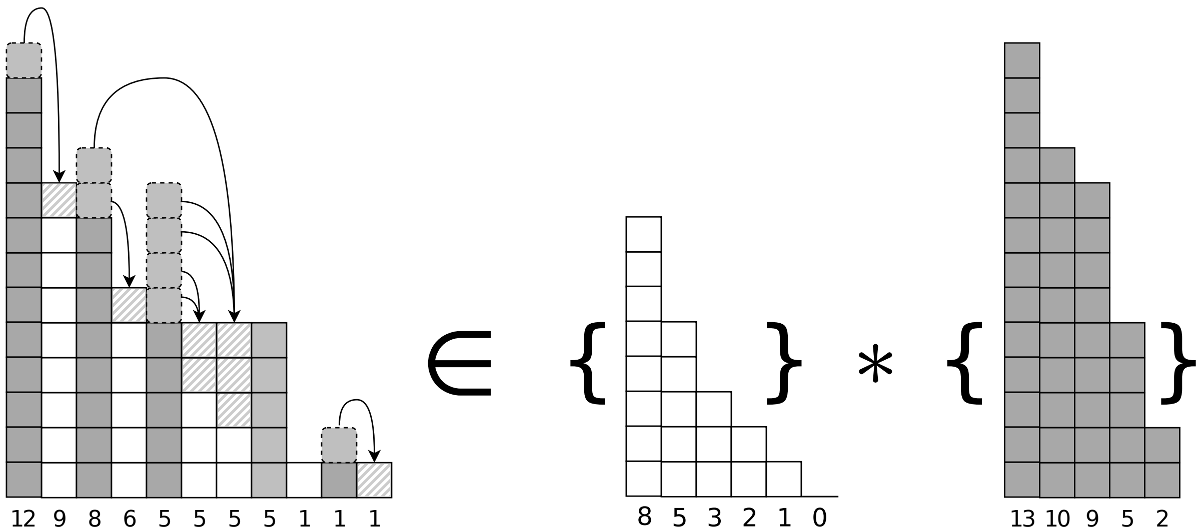
$$\alpha_j = \begin{cases} \min B_1 + 1 & j = 1 \\ \max\{\alpha_{j-1} + 1, \min B_j + j\} & 1 < j \leq p \end{cases}$$

és

$$\beta_i = \begin{cases} \min\{l \in \{1, \ldots, r\} | l \neq \alpha_j, 1 \leq j \leq p\} & i = 1 \\ \min\{l \in \{\beta_{i-1} + 1, \ldots, r\} | l \neq \alpha_j, 1 \leq j \leq p\} & 1 < i \leq n \end{cases}.$$

Az $(\alpha_j)_{1\leq j\leq p}$ és $(\beta_i)_{1\leq i\leq n}$ sorozatok és a B_j halmazok minden esetben explicit módon kiszámolhatóak, ezért a tételben nincs implicit létezési feltétel és minden változó értéke számolható. Azontúl, hogy jellemzi a preinjektív Kronecker-modulusok bővítési szorzatát, a szorzat minden elemére megad egy „kanonikus” összefésülést, azt a sorrendet, amikor az $(\alpha_j)_{1\leq j\leq p}$ sorozat lexikografikusan a legkisebb.

2.8. Példa. Az előbbi tételt a következő példával szemléltetjük:



A 2.7 tétel jelöleseit használva a $p = 6$, $n = 5$, $r = 11$, $B_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B_2 = \{2, 3, 4, 5\}$, $B_3 = B_4 = \{3, 4, 5\}$, $B_5 = \{4, 5\}$, $B_6 = \{5\}$, következésképpen $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 6$, $\alpha_4 = 7$, $\alpha_5 = 9$, $\alpha_6 = 11$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 5$, $\beta_4 = 8$, $\beta_5 = 10$ és fennállnak a következő egyenlőtlenségek: $a_j \leq c_{\alpha_j}$ és $b_i \geq c_{\beta_i}$ minden $1 \leq j \leq p$ és $1 \leq i \leq n$ értékre.

A 2.7 tétel alapján meg lehet szerkeszteni egy olyan algoritmust (Algorithm 1), ami lineáris időben el tudja dönteni hogy egy bizonyos preinjektív modulus benne van-e két adott preinjektív bővítési szorzatában.

A következőkben bemutatunk egy másik, ezzel ekvivalens, de talán szemléletesebb kombinatorikai modellt a preinjektív Kronecker-modulusok bővítési szorzatára ([13] alapján). A 2.7 tétel jelöléseit használva legyenek $a_1 \geq \dots a_p \geq 0$, $b_1 \geq \cdots \geq b_n \geq 0$, $c_1 \geq \cdots \geq c_r \geq 0$ csökkenő sorozatok. El akarjuk dönteni, hogy igaz-e a

$$[I_{c_1} \oplus \cdots \oplus I_{c_r}] \in \{[I_{a_1} \oplus \cdots \oplus I_{a_p}]\} * \{[I_{b_1} \oplus \cdots \oplus I_{b_n}]\}$$

állítás. Kicsit átfogalmazva a 2.5 és 2.7 tételek állításait a következő módon járhatunk el:

1. Felépítünk egy $(p + 1) \times (n + 1)$-es mátrixot (táblázatot) az $(a_j)_{1\leq j\leq p}$ és $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ sorozatok elemeinek parciális összegeiből: $T_{ji} = \sum_{j'=1}^{j} a_{j'} + \sum_{i'=1}^{i} b_{i'}$, $0 \leq j \leq p$, $0 \leq i \leq n$.

2. A T_{00}-ás elemtől indulva (ez a mátrix bal felső sarka) a $(c_k)_{1\leq k\leq r}$ sorozat minden egyes elemére egy-egy lépést próbálunk végrehajtani a T mátrixban, vagy lefele,

vagy jobbra. Célunk az, hogy elérjünk a mátrix jobb alsó sarkába, vagyis a T_{pn} elemhez. Minden egyes lépésnél kiszámoljuk az $s_k = \sum_{k'=1}^{k} c_k$ parciális összeget $(0 \leq k \leq n+p)$. Feltételezve, hogy egy adott pillanatban a T_{ji} pozícióban vagyunk (tehát már megtettünk $j+i$ darab lépést), a következő módon folytathatjuk:

(a) Próbáljunk először jobbra lépni. Jobbra (vagyis a $T_{j,i+1}$ pozícióba) akkor tudunk lépni, ha teljesülnek a következő feltételek: $s_{j+i+1} \leq T_{j,i+1}$ és $c_{j+i+1} \leq b_{i+1}$.

(b) Ha nem tudtunk jobbra lépni, próbáljunk lefele lépni. Lefele (vagyis a $T_{j+1,i}$ pozícióba) akkor tudunk lépni, ha teljesülnek a következő feltételek: $s_{j+i+1} \leq T_{j+1,i}$ és $c_{j+i+1} \geq a_{j+1}$.

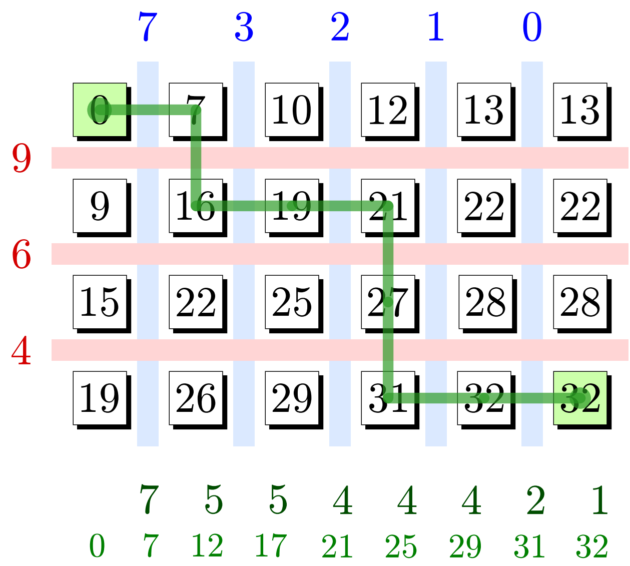
(c) Ha sem jobbra sem lefele nem sikerül lépni, akkor a folyamat megszakad.

3. Ha az előző pont szabályai szerint leérünk a jobb alsó sarokba, akkor igaz, hogy $[I_{c_1} \oplus \cdots \oplus I_{c_r}] \in \{[I_{a_1} \oplus \cdots \oplus I_{a_p}]\} * \{[I_{b_1} \oplus \cdots \oplus I_{b_n}]\}$. Ha nincs egy ilyen szabályok szerint felépített út a bal felső sarokból a jobb alsóba, akkor $[I_{c_1} \oplus \cdots \oplus I_{c_r}] \notin \{[I_{a_1} \oplus \cdots \oplus I_{a_p}]\} * \{[I_{b_1} \oplus \cdots \oplus I_{b_n}]\}$.

2.9. Példa. El akarjuk dönteni, hogy igaz-e a $[I_7 \oplus I_5 \oplus I_5 \oplus I_4 \oplus I_4 \oplus I_4 \oplus I_2 \oplus I_1] \in \{[I_7 \oplus I_3 \oplus I_2 \oplus I_1 \oplus I_0]\} * \{[I_9 \oplus I_6 \oplus I_4]\}$ állítás. Először felépítjük a T mátrixot (pirossal jelöltük az $(a_j)_{1 \leq j \leq p}$ elemeit és kékkel a $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ sorozatot):

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & & 7 & 3 & 2 & 1 & 0 \\
\hline
 & \boxed{0} & \boxed{7} & \boxed{10} & \boxed{12} & \boxed{13} & \boxed{13} \\
9 & \boxed{9} & \boxed{16} & \boxed{19} & \boxed{21} & \boxed{22} & \boxed{22} \\
6 & \boxed{15} & \boxed{22} & \boxed{25} & \boxed{27} & \boxed{28} & \boxed{28} \\
4 & \boxed{19} & \boxed{26} & \boxed{29} & \boxed{31} & \boxed{32} & \boxed{32}
\end{array}$$

Ezután az előbb leírt szabályt alkalmazva felépítünk egy utat a bal felső sarokból a jobb alsóba. A $(c_k)_{1 \leq k \leq r}$ sorozat elemeit zölddel jelöltük, a legalsó sorban az s_k parciális összegek sorozatát tüntettük fel. Jobbra akkor tudunk lépni, ha $(c_k)_{1 \leq k \leq r}$ sorozatban az aktuális elem értéke kisebb vagy egyenlő, mint a kék elválasztó sáv fölé írt szám, lefele akkor, ha nagyobb vagy egyenlő, mint a piros elválasztó sáv elé írt szám. Ezenkívül, bármelyik irányba is mennénk, az aktuális parciális összeg nem haladhatja meg a négyzetbe írt értéket.



A következő algoritmus gyakorlatilag ezt a módszert implementálja (azzal a különbséggel, hogy nem számolja ki előre a T_{ji} elemek mindegyikét, csak a lépésnek megfelelő elemet).

Algorithm 1: IsPreinjectiveExt$(B,\ A,\ C)$

input : $B, A, C \in$ mod-κK preinjektívek, ahol $B = I_{b_1} \oplus \cdots \oplus I_{b_n}$, $A = I_{a_1} \oplus \cdots \oplus I_{a_m}$, $C = I_{c_1} \oplus \cdots \oplus I_{c_p}$ és $m, n, p > 0$.

output: $\begin{cases} \textsf{True} & \text{ha } C\text{-re igaz hogy } [C] \in \{[A]\} * \{[B]\} \\ \textsf{False} & \text{különben} \end{cases}$.

if $m + n \neq p$ **then return** False;
$S_a, S_b, S_c \leftarrow 0$;
$j, i \leftarrow 1$;
for $t \leftarrow 1$ **to** p **do**
    $S_c \leftarrow S_c + c_t$;
    if $j \leq m$ **and** $a_j \leq c_t$ **and** $S_a + S_b + a_j \geq S_c$ **then**
        $S_a \leftarrow S_a + a_j$;
        $j \leftarrow j + 1$;
    else if $i \leq n$ **and** $b_i \geq c_t$ **and** $S_a + S_b + b_i \geq S_c$ **then**
        $S_b \leftarrow S_b + b_i$;
        $i \leftarrow i + 1$;
    else return False;
if $S_a + S_b \neq S_c$ **then return** False;
else return True;

2.2. Algoritmusok

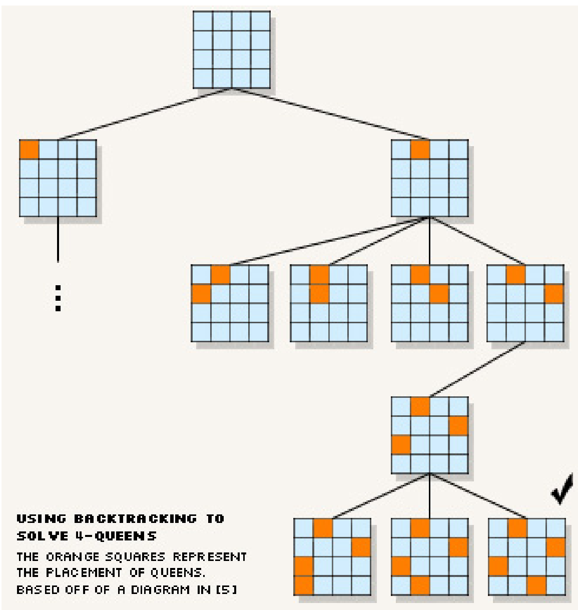
A visszalépéses keresésről általában

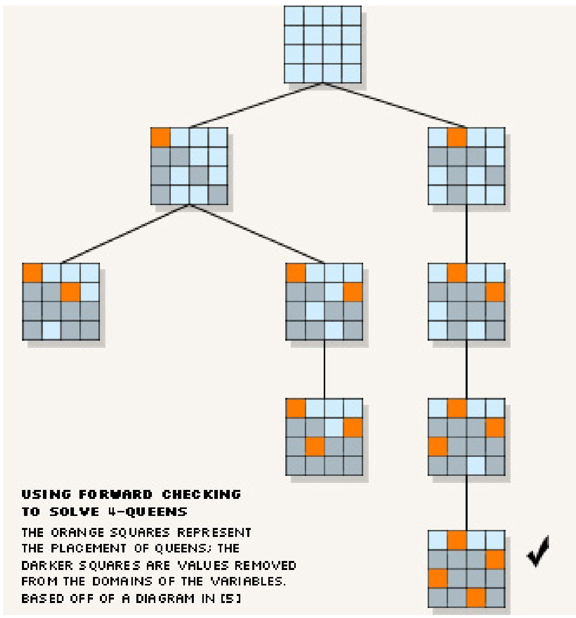
A visszalépéses keresés egy olyan módszer, amelyben számon tartjuk a kiinduló állapotból az aktuális állapotba vezető utat, illetve figyelembe vesszük, hogy milyen továbblépési lehetőségeink vannak még. A keresés szabálya, hogy a felépített utat tovább bővítjük egy új állapottal, vagy ha ez nem kivitelezhető akkor visszalépünk és töröljük az utolsó élet. Ez az algoritmus, (angolul: backtracking) a visszalépést csak legvégső esetben alkalmazza, amikor már minden egyéb lehetőséget kipróbált. Előfordul, hogy lehetnek zsákutcák, amikor elfogytak az előrelépési lehetőségeink.

Akkor érdemes ilyen keresést alkalmazni, amikor a keresési tér reprezentálható mint fastruktúra – ez esetben a körök miatt nem kell fájjon a fejünk. Továbbá kialakíthatunk stratégiát a lehetséges opciók között, ugyanakkor megjelölhetjük azokat, amelyeken nem érdemes továbblépni.

Elméletileg ezzel az algoritmussal minden probléma megoldható. De mivel ez az algoritmus általában exponenciális lépésszámú, ezért a gyakorlatban nincs elég időnk kivárni, hacsak nem alkalmazunk valamilyen heurisztikát illetve a probléma modelljéből származó sajátosságot. ugyanis ekkor nem kell minden ágat bejárni.

2.10. Példa. A leggyakoribb példa erre, amikor egy $n \times n$ méretű sakktáblán n királynőt szeretnénk elhelyezni úgy, hogy ezek ne üssék egymást. A következő példa ezt mutatja be az $n = 4$ esetére:



,


Minden k szinten $1 \leq k \leq n$, a k-adik sorba szeretnénk elhelyezni egy királynőt valamelyik oszlopba. Az összes lehetőséget kipróbáljuk ami nem sérti a feltételeket. Ha elfogytak a lehetőségek akkor visszalépünk egy kisebb szintre. A második képen látható, hogy kétszer is zsákutcába futunk, amíg elérjük a célt. Ha elértük a legalsó szintet kapunk egy megoldást, ez esetben le is állhatunk mert csak egyet kér a feladat. (képek és bővebb leírás: `http://4c.ucc.ie/web/outreach/tutorial.html`)

A bővítési szorzat kiszámítása

A következő jelöléseket illetve változókat használjuk mindkét algoritmus esetén. Előkészületként inicializálunk egy C vektort, amiben lehetséges jó partíciókat számoljuk, aminek a hossza $p = m + n$. Értelem szerűen, a bemenet része az A és B , a fehér illetve szürke partíciók. Az összeg $S = \sum_{j=1}^{m} a_j + \sum_{i=1}^{n} b_i$. Az eredmény megoldásokat egy halmazban gyűjtjük, ez kezdetben üres: $R = \{\}$. A következő algoritmus egy rekurzív változata a

[12] cikkben tárgyalt algoritmusnak.

Algorithm 2: generateTerms(B, A, C, i, j, k)

input : B, A preinjektív Kronecker-modulusok, azaz a szürke és fehér partíciók, $B = b_1 \geq \cdots \geq b_n$, $A = a_1 \geq \cdots \geq a_m$ C az aktuálisan alakított partíció, i, j és k jelentése, hogy aktuálisan hányadik elemén állunk a B-, A- illetbe C-sorozatnak,

output: $R \cup$ {az ezt követö ágakban számolt partíciók}.

if $k > p$ **then** $R \leftarrow R \cup \{C\}$;
else
  $left \leftarrow S - \sum_{t=1}^{k} c_t$;
  $cmin \leftarrow \left\lceil \frac{left}{p-k} \right\rceil$;
  if $k = 0$ **then** $cmax \leftarrow max(a_0, b_0)$;
  else $cmax \leftarrow min(c_{k-1}, left)$;
  $l = cmax$;
  while $l \geq cmin$ **do**
    $cb, ca \leftarrow -1, -1$;
    if $j \leq m$ **then**
      $ca \leftarrow min(\sum_{t=1}^{j} a_t + \sum_{t=1}^{i} b_t - \sum_{t=1}^{k} c_t, l)$;
      if $ca < max(cmin, a_j)$ **then** $ca \leftarrow -1$;
    if $i \leq n$ **then**
      $cb \leftarrow min(b_i, l)$;
      if $cb < cmin$ **then** $cb \leftarrow -1$;
    $c_k \leftarrow max(ca, cb)$;
    if $c_k \geq 0$ **then**
      if $c_k = ca$ **then**
        $generateTerms(B, A, C, i, j+1, k+1)$
      else
        $generateTerms(B, A, C, i+1, j, k+1)$
    $l \leftarrow l - 1$;

A második algoritmus a táblázatos módszerre alapul és ez hozza az újítást. Ha a mátrix egyes elemein megvizsgáljuk, hogy milyen értékekkel tudunk továbblépni, akkor ilyen módon bejárva kiszámolhatjuk az összes középső tagot. A generálására ugyancsak backtracking algoritmust használhatunk. Mivel a megoldások halmaza egy részhalmaza az

S összeg r hosszúságú partíciók halmazának, vagyis a megoldást $c_1 \geq c_2 \geq \ldots \geq c_p \geq 0$ alakú sorozatok között kereshetjük. Generáljuk az összes arra „érdemes" partíciót és összegyűjtjük a megoldásokat.

Az algoritmus felhasználja a parciális összegek tábláját, ennek a dimenziója $(n+1) \times (p+1)$ azaz $T_{i,j} = \sum_{k=1}^{i-1} b_k + \sum_{k=1}^{j-1} a_k$ $(T_{1,1} = 0)$. Az algoritmust $MergeStep(B, A, C, 1, 1, 1, S, 0)$ alakban hívjuk. A kezdeti hívás ugyanakkor az i, j, k indexeket is inicializálja akárcsak az előző esetén. Az program lefutása után az $\{A\} * \{B\}$ eredmény az R halmazban található.

Észrevétel. Habár a döntési feladatot sikerült megoldani lineáris időben, a lehetséges középső tagok száma nagyon nagy lehet. Abban az esetben ha az összes lehetséges I középső tagot (másképp: összefésült partíciót) ki szeretnénk számolni egy $0 \to I_0 \to I \to I_n \to 0$ alakú rövid egzakt sorban, akkor ezek számára egy durva becslés az n egész partícióinak a száma (Hardy-Ramanujan képlet) $\mathcal{P}(n) = \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$.

Az algoritmus vázlata

Az algoritmust az első szintről ($k = 1$) indítjuk. A C általánosan összefésült partíción dolgozunk és az egyes szinteken különböző értékeket feleltetünk meg az elemeinek, jelöltük $c_1, \ldots, c_k$-val. Az algoritmus bizonyos lépései az adott k szinten a következők:

1. Ha $k > p$, akkor a jelenlegi $(c_1, \ldots, c_k)$ sorozatot adjuk hozzá a megoldás halmazhoz, és lépjünk vissza az előző szintre.

2. Ha $k \leq p$, és ezt a szintet egy alsóbb szintről értük el akkor:

   (a) Kiszámítjuk az $S_k = \{c_{min}, \ldots, c_{max}\}$ nemnegatív egészek halmazát (valójában csak egy intervallum) úgy, hogy $\forall c_k \in S_k$ esetén a $(c_1, \ldots, c_k)$ sorozat legyen egy lehetséges részmegoldás

   (b) Az összes $c_k \in S_k$elemre:

      i. Megvizsgáljuk a két (jobbra – fromA vagy lefele –fromB lépés) feltételt. Itt nagyon fontos, hogy csak az egyik irányba lépünk. Ha mindkét irányba tudunk lépni akkor a jobbra lépést preferáljuk.

      ii. Kiválasztjuk az elemet és fellépünk egy következő szintre (növeljük a k-t egyel).

   (c) Visszalépünk az előző szintre.

Összehasonlítás a korábbi verzióval

A *mergeStep* algoritmusunk a pontosabb megszorítások miatt kevesebb alkalommal fut zsákutcába. Ez a verzió esetén még lesznek zsákutcák, ezért is nem bizonyítjuk itt, hogy a fák ágai amiket bejár ugyanolyan mélyek és a fa teljes.

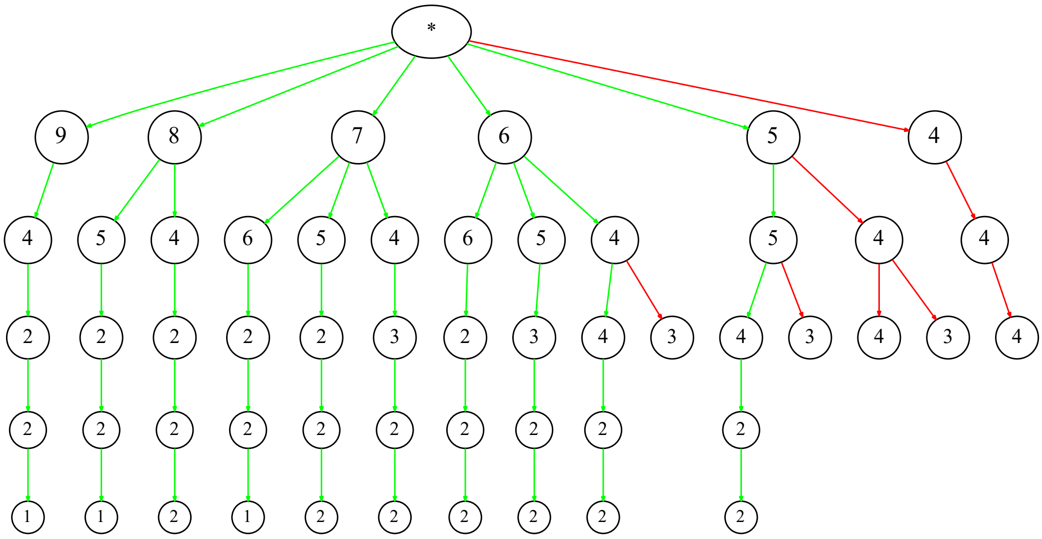
Algorithm 3: MergeStep(B, A, C, i, j, k, Sum, $cSum$, T)

input : B, A preinjektív Kronecker-modulusok, azaz a szürke és fehér partíciók, $B = b_1 \geq \cdots \geq b_n$, $A = a_1 \geq \cdots \geq a_m$
T a parciális összegeinek táblája, i, j és k jelentése, hogy aktuálisan hányadik elemén állunk a B-, A- illetbe C-sorozatnak,

output: $R\cup$ {az ezt követö ágakban számolt partíciók}.

if $k > p$ **then** $R \leftarrow R \cup \{C\}$;
else
    $SumToLeft \leftarrow Sum - \sum_{t=1}^{k} c_t$;
    $cMinPerLeft \leftarrow \left\lceil \frac{SumToLeft}{p-k} \right\rceil$;
    $cmin \leftarrow cMinPerLeft$;
    if $j \leq m$ **then** $cmin \leftarrow max(cMinPerLeft, a_j)$;
    if $k = 0$ **then** $cmax \leftarrow max(a_0, b_0)$;
    else $cmax \leftarrow min(c_{k-1}, SumToLeft)$;
    $candidate = cmax$;
    while $candidate \geq cmin$ **do**
        $fromA \leftarrow 2$;
        $fromB \leftarrow 2$;
        if $j \leq m$ **and** $candidate \geq a_j$ **and** $cSum + candidate \leq T_{i,j+1}$ **then** $fromA \leftarrow 0$;
        if $i \leq n$ **and** $candidate \leq b_i$ **and** $cSum + candidate \leq T_{i+1,j}$ **then** $fromB \leftarrow 1$;
        $direction \leftarrow min(fromA, fromB)$;
        if $direction \leq 1$ **then**
            $c_k \leftarrow candidate$;
            if $direction = 0$ **then**
                $MergeStep(B, A, C, i, j+1, k+1, Sum, cSum + candidate, T)$
            else
                $MergeStep(B, A, C, i+1, j, k+1, Sum, cSum + candidate, T)$
        $candidate \leftarrow candidate - 1$;

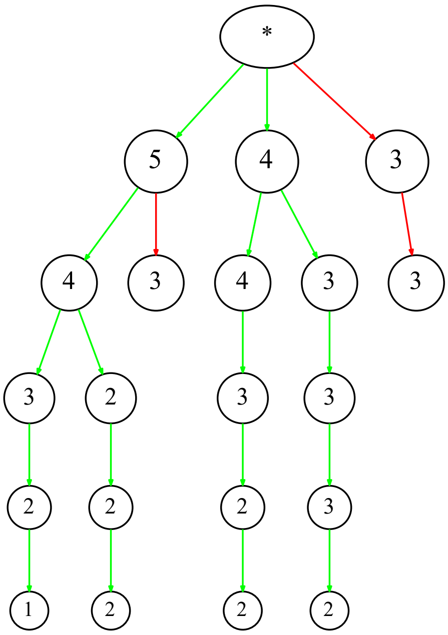
2.11. Példa. A következő példán megmutatjuk hogyan járnak be egy fastruktúrát az algoritmusok a (4, 1) fehér és (9, 2, 2) fekete partíciók összefésülése közben. Ebben az esetben a két algoritmus fája meggyegyező:

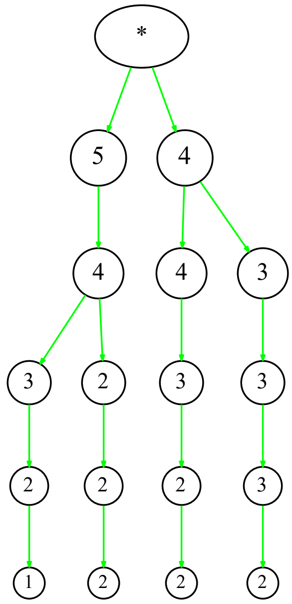


Láthatjuk, hogy a zsákutcák száma 5. A képen a piros lelógó irányított élek azok a döntések amik ide vezetnek. Ennek az a magyarázata, hogy ha a partíció elejére túl kis értékeket választunk, akkor a 2.7 tételben szereplő $b_i \geq c_{\beta_i}$ egyenlőtlenségek közül nem mindenik teljesül $1 \leq i \leq n$ esetén.

A következő példa bemutatja, hogy bizonyos esetekben a *mergeStep* kevesebb zsákutcába fut mint a a társa.

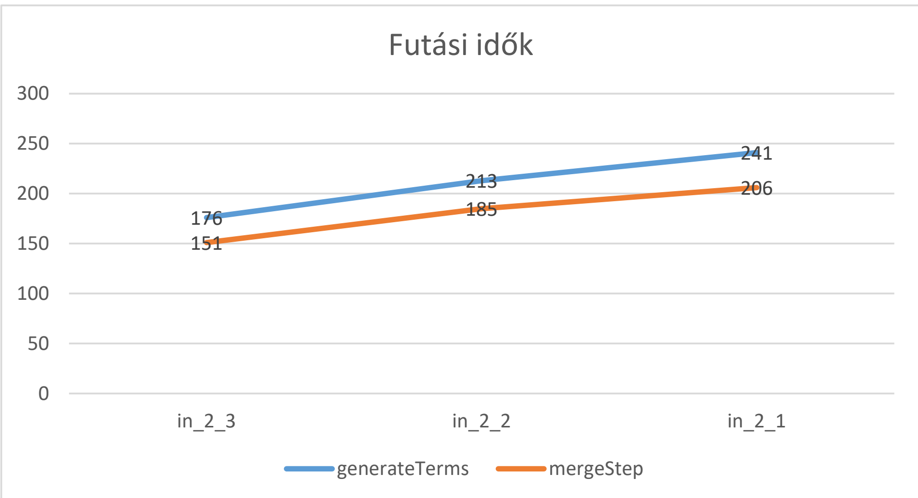
2.12. Példa. Most a (4, 1) és (5, 3, 2) rövidke partíciókat fésüljük össze. A képen balra látható, hogy a *generateTerms* nevezetű algoritmus kétszer csőbe fut az újjal ellentétben.





Sőt, egy nagyobb példa esetén a számok látványosabban eltérhetnek, ugyanis a (19, 15, 8, 4, 1, 1) fehér és a (26, 12, 10, 8, 4) fekete partíciók összefésülése során ezeknek a zsákutcába futás számai 7453 a $generateTerms$ esetén és 4699 a $mergestep$ esetén, ami jóval kevesebb.

Időbeli összehasonlítást végeztünk a különböző bemeneti esetekre ahol kiszámoljuk a következő szorzatokat: $in_{21} = \{[I_8 \oplus I_5 \oplus I_3 \oplus I_2 \oplus I_1 \oplus I_0]\} * \{[I_{13} \oplus I_{10} \oplus I_9 \oplus I_5 \oplus I_2]\}$, $in_{22} = \{[I_7 \oplus I_5 \oplus I_4 \oplus I_2 \oplus I_1 \oplus I_0]\} * \{[I_{12} \oplus I_{11} \oplus I_9 \oplus I_5 \oplus I_2]\}$ és $in_{23} = \{[I_8 \oplus I_5 \oplus I_3 \oplus I_2 \oplus I_1 \oplus I_0]\} * \{[I_{12} \oplus I_{11} \oplus I_7 \oplus I_7 \oplus I_2]\}$. A függőleges tengelyen mikroszekundumban jelennek meg az értékek:



3. fejezet

Alkalmazás

Ebben a részben röviden felvázoljuk a Kronecker-modulusok bővítési szorzatának egy lehetséges alkalmazását. A résznyalábprobléma kontrollelméletben fontos, általános esetben egyelőre megoldatlan kérdés, mérnöki alkalmazásokkal (lásd [4]).

3.1. Definíció. Egy $A + \lambda B \in \mathcal{M}_{m,n}(\kappa[\lambda])$ alakú mátrixot **lineáris mátrixnyaláb**nak nevezünk (vagy csak egyszerűen **mátrixnyaláb**nak).

3.2. Definíció. Két $A + \lambda B, A' + \lambda B' \in \mathcal{M}_{m,n}(\kappa[\lambda])$ mátrixnyaláb *szigorúan ekvivalens*, ha léteznek a konstans, nemszinguláris $P \in \mathcal{M}_m(\kappa)$ és $Q \in \mathcal{M}_n(\kappa)$ mátrixok úgy, hogy $A' + \lambda B' = P(A + \lambda B)Q$. A szigorú ekvivalenciát $A' + \lambda B' \sim A + \lambda B$ jelöli.

3.3. Definíció. Egy $A' + \lambda B'$ mátrixnyaláb akkor és csak akkor **résznyaláb**ja $A + \lambda B$-nek ha léteznek a $A_{12} + \lambda B_{12}$, $A_{21} + \lambda B_{21}$, $A_{22} + \lambda B_{22}$ nyalábok úgy, hogy

$$A + \lambda B \sim \begin{pmatrix} A' + \lambda B' & A_{12} + \lambda B_{12} \\ A_{21} + \lambda B_{21} & A_{22} + \lambda B_{22} \end{pmatrix}.$$

Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a kisebbik mátrixnyaláb kiegészíthető a nagyobbikban. Sorkiegészítésről beszélünk, ha az $A_{12}, B_{12}, A_{22}, B_{22}$ mátrixokat elhagyjuk, és oszlopkiegészítésről, ha az $A_{21}, B_{21}, A_{22}, B_{22}$ mátrixokat hagyjuk el.

Minden mátrixnyaláb szigorúan ekvivalens egy kanonikus blokkdiagonális alakkal, amit a következő **klasszikus Kronecker-invariánsok**kal jellemezhetünk (lásd [3]):

1. sor-minimális indexek
2. oszlop-minimális indexek
3. véges és végtelen elemi osztók

A mátrixnyalábokat és a Kronecker-modulusok között egyértelmű megfeleltetés létezik. Egy $A + \lambda B \in \mathcal{M}_{m,n}(\kappa[\lambda])$ mátrix nyalábot természetes módon a $M_{A,B}$: $k^m \underset{B}{\overset{A}{\leftleftarrows}} k^n$ reprezentációnak (és ezáltal Kronecker-modulusnak) lehet megfeleltetni. A klasszikus Kronecker-invariánsok is azonosíthatóak a Krull–Schmidt-tételben (1.9. tétel) szereplő

Kronecker-invariánsokkal. A résznyaláb probléma a következő módon fogalmazható meg a Kronecker-modulusok nyelvén: $A' + \lambda B'$ résznyalábja $A + \lambda B$-nek $\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{N}$: $[M_{A,B}] \in \{[\beta I_0]\} * \{[M_{A',B'}]\} * \{[\alpha P_0]\}$.

Irodalomjegyzék

[1] I. Assem, D. Simson, A. Skowroński, *Elements of the representation theory of associative algebras, Vol. 1, Techniques of representation theory*, London Mathematical Society Student Texts 65, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[2] M. Auslander, I. Reiten, S. Smalø, *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, No. 36, Cambridge University Press, 1995.

[3] F. R. Gantmacher, *Matrix theory*, vol. 1 and 2, Chelsea, New York, 1974.

[4] J.J Loiseau, S. Mondié, I. Zaballa, P. Zagalak, *Assigning the Kronecker invariants of a matrix pencil by row or column completions*, Linear Algebra and its Applications, Vol. 278 (1998), pp. 327-336.

[5] M. Reineke, *The monoid of families of quiver representations*, Proc. Lond. Math. Soc., 84 (2002), 663-685.

[6] C. M. Ringel, *Tame Algebras and Integral Quadratic Forms*, Lecture Notes in Mathematics, No. 1099, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[7] D. Simson, A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Vol. 2, Tubes and Concealed Algebras of Euclidean Type*, London Mathematical Society Student Texts 71, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[8] Cs. Szántó, *Submodules of Kronecker modules via extension monoid products*, preprint.

[9] Cs. Szántó, I. Szöllősi, *On preprojective short exact sequences in the Kronecker case*, Journal of Pure and Applied Algebra, Vol. 216 (5) (2012), pp. 1171-1177.

[10] Cs. Szántó, I. Szöllősi, *The terms in the Ringel-Hall product of preinjective Kronecker modules*, Periodica Mathematica Hungarica, Vol. 63 (2) (2011), pp. 75-92.

[11] Cs. Szántó, I. Szöllősi, A short solution to the subpencil problem involving only column minimal indices, Linear Algebra and its Applications, Vol. 517 (2017), pp. 99-119.

[12] I. Szöllősi, *Computing the extensions of preinjective and preprojective Kronecker modules*, Journal of Algebra, Vol. 408 (2014), pp. 205-221.

[13] I. Szöllősi, *The double extension of preinjective Kronecker modules*, preprint.