

# **Tüzelő oszcillátorok szinkronizációja**

**Pál Ferenc**

Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Fizika Kar, fizika szak, 2. évfolyam

Témavezető:

**Dr. Néda Zoltán** egyetemi professzor

Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Elméleti és számítógépes fizika tanszék

XI. Erdélyi Tudományos Diákköri Konferencia

Kolozsvár, 2008. május 23–24.

## **Kivonat**

Dolgozatom középpontjában egy szimulációs program áll, amellyel könnyedén vizsgálható egy tüzelő oszcillátorokból álló rendszer viselkedése a különböző paraméterek változtatásának függvényében. Megfigyelhető, ahogyan az oszcillátorok szinkronizálódnak, és a rendszer fázisátalakuláson megy át; vagy más paraméterbeállítás esetén, megmarad a rendezetlenség. Így sokkal inkább kísérletivé válik egy ilyen oszcillátor-rendszer viselkedésének tanulmányozása, ami különben hosszas matematikai analízist igényelne.

## **Bevezető**

A szinkronizáció a természet minden szintjén megtalálható, a mikroszkopikustól a makroszkopikusig, az élettől az élettelenig. Christiaan Huygens holland fizikus volt, aki először figyelte meg az ingaórák szinkronizációját. Azt vette észre, hogy közös felfüggesztésre helyezett két órának szinkronban leng az ingája. Megsejtette, hogy a megoldás a közös felfüggesztésben vagy az órák közti kis távolságban van, ám teljes magyarázatot nem tudott adni a jelenségre.[2] A szinkronizáció ott van az élő szervezetekben is. A szívizom sejtei egymással összhangban húzódnak össze, ez teszi képessé a szívet arra, hogy vért pumpáljon. A szinkronizáció felbukkan az élőlények közti valamint az élőlények és környezetük közti interakciókba is. Például az emberi szervezetben bizonyos oszcillátor sejtek frekvenciája határozza meg a cirkadiális ritmust. Azt, hogy nappal vagyunk ébren és éjszaka alszunk, vagy éppenséggel az alvás hosszát. Az élőlények közti szinkronizáció egyik leglátványosabb példája a malajziai erdőkben élő tűzlegyek (*Pteroptyx tener*) fényszerenádja. Sötétedés után a tűzlegyek hímjei felcsimpaszkodnak a folyómenti fák leveleire, ágaira, és egymással szinkronban villannak fel és alszanak ki, akár több ezrével is egyszerre. Mindenféle karmester vagy bármilyen nemű központi irányítás nélkül.[1] Mi, emberek is képesek vagyunk hasonló kollektív viselkedésre. Egy előadás utáni ritmikus vastaps is a szinkronizáció eredménye.[2] Minden, ami él, fenn kell tartsa saját rendezettségét, és ezt a lehető legkisebb energiabefektetéssel igyekszik megtenni. Annál kedvezőbb eset pedig nem létezik, mint amikor a rend önmagától alakul ki, így az irányításra nem kell semmit sem fordítani. Ha megértenénk, hogy hogyan jön létre a szinkronizáció, rengeteg területen - legyen az

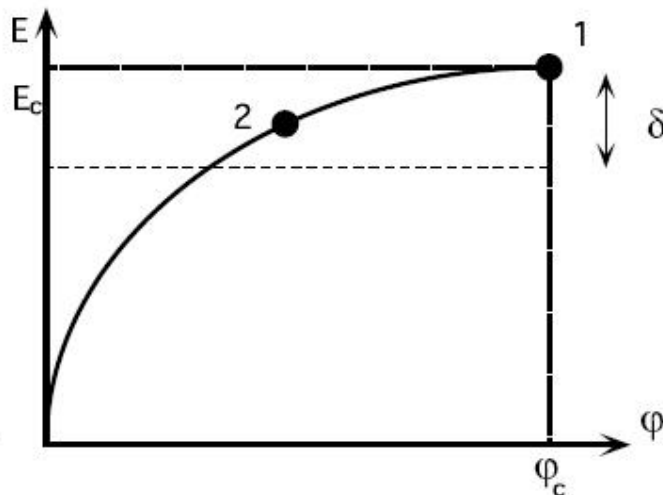
orvoslás, kommunikáció vagy automatizálás - fel lehetne használni hatékonyabb módszerek kidolgozására.

Szinkronizáló rendszerek leírására több modell is létezik. Mindnek közös vonása, hogy a rendszer alkotóelemei oszcillátorok, amelyek kölcsönhatnak egymással. Dolgozatomban olyan rendszereket modelleztem, amelyek elemei egymásra impulzusokon keresztül hatnak, hasonlóan ahhoz, ahogyan a tűzlegyek fényimpulzusok kibocsátásával befolyásolják egymásra. Az ilyen oszcillátorokat tüzelő oszcillátoroknak nevezzük.

### A tüzelő oszcillátorok modellje

Az oszcillátorok működését röviden a következőképpen lehet leírni. Az oszcillátorok fázisa az időben folytonosan halad. Energiájuk egy  $E_i(t)$  függvény szerint növekszik az időben monoton módon. Ezt nevezzük növekedési szakasznak. A növekedés addig folytatódik, amíg az energia el nem ér egy  $E_{ik}$  küszöb értéket. Amint az oszcillátor eléri  $E_{ik}$ -t, energiája nullára csökken. Ezt nevezzük relaxációs szakasznak. A relaxációs szakasz időtartama a növekedési szakaszhoz viszonyítva nagyon rövid.

Célszerű még bevezetni a  $\varphi_i$  fázist, ami  $\varphi_i = t \bmod \varphi_{ic}$  formában értelmezhető. Ahol  $\varphi_c$  jelenti azt a fázis értéket, amelyre az energia függvény a küszöbértéket adja.



1. ábra

*Két (1 és 2) azonos tüzelő oszcillátor. Az 1 éppen elérte, küszöb értéket. A 2 energiaszintje  $\delta$  értékkel fog növekedni az 1 által kibocsátott impulzus hatására*

Az oszcillátorok közti csatolást a relaxációs szakaszban kibocsátott  $\delta$  impulzus valósítja meg. A tűzlegyek esetében ez egy felvillanás azaz fény-impulzus.

A csatolás lehet **globális**: ebben az esetben minden oszcillátor kapcsolatban van minden másik oszcillátorral. A csatolás másik formája a sugárra korlátozott csatolás, amikor egy oszcillátor hatása csak egy meghatározott sugarú körön belül elhelyezkedő oszcillátorokra terjed ki.

A hatás, amit az impulzus kivált, a modelltől függően, lehet serkentő vagy gátló. Serkentő hatás esetén az impulzust felfogó oszcillátor növeli energia szintjét, míg csillapító hatás esetén az előzővel éppen ellentétesen, csökkenti energiáját.

Az általános modellhez kikötéseket adva a kapott partikuláris esetekre törvények állapíthatók meg.

A modell egyszerűsítése érdekében feltételezzük, hogy minden oszcillátort azonos  $E_i(t) = E(t)$  függvény és küszöbérték határoz meg. A csatolás globális és az impulzus  $\delta = \alpha E_c/N$ . Ahol  $\alpha$  disszipációs tényező és  $N$  az oszcillátorok száma. Ugyanakkor feltételezzük, az impulzusok additivitását, vagyis, hogy az egyszerre kisülő oszcillátorok impulzusai összegződnek.

Ahhoz, hogy az oszcillátorok fázisa egybe eshessen, azaz teljesen szinkronizálódjanak, szükség van az adszorpció szabályára. Először azonban értelmezzük, a lavina fogalmát, hogy könnyebb legyen a adszorpciót bevezetni. Lavinának nevezzük azt a kisüléssorozatot, amely úgy jön létre, hogy egy oszcillátor tüzelése, egy másik, tőle fázisban lemaradt oszcillátor energiaszintjét a kritikus érték fölé emeli, ezáltal kisülésre készíti azt. Ez a folyamat akár ismétlődhet is, és nem csak egy-egy oszcillátorpárt érinthet. Adszorpció alatt pedig azt értjük, hogy az egy lavinában kisült oszcillátorok fázisban maradnak és együtt fognak a későbbiekben újból tüzelni. Az adszorpció legegyszerűbben úgy valósulhat meg, hogy az oszcillátorok közvetlenül a relaxációs szakasz után refrakter állapotba kerülnek, addig, amíg az általuk elindított lavina el nem hal. A refrakter állapot azt jelenti, hogy az oszcillátor érzéketlen a bejövő impulzusokra, és energiája is nulla marad.[3]

### **Konvex oszcillátorok :**

Az azonos oszcillátorok esetét tárgyalva R. Mirollo és S. Strogatz bebizonyította, hogy amennyiben  $E(t)$  energia függvény konvex – mint az 1. ábra esetében -, és az impulzusok értéke állandó, a rendszer mindig szinkronizálódik.

Lineáris oszcillátorok esetén az egyszerűsítés érdekében az állapotváltozó  $E_i(t) = t \bmod E_c$

ként értelmezhető,  $0 \leq E_i \leq E_c = 1$ . Ebből kiindulva a konvex oszcillátorokat leíró egyenlet a következő formájú:

$$\frac{dE(t)}{dt} = S_0 - \gamma E ; 0 \leq E \leq E_c = 1$$

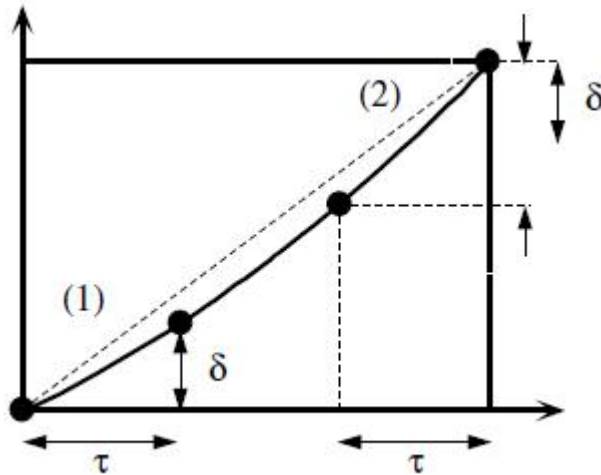
Ahol  $S$  egy állandó bejövő energia, míg  $\gamma$  disszipációs tényező. Ennek az egyenletnek a megoldása egy konvex függvény, amelynek konvexitása  $\gamma$  tényezőtől függ. A  $\gamma > 0$  eset megfelel R. Mirollo és S. Strogatz által tárgyalt konvex esetnek, tehát a rendszer ilyenkor mindig szinkronizálódik.[1]

S. Bottani később rámutatott arra, hogy a konvexitás nem szükséges feltétele a szinkronizációnak, azaz lineáris vagy konkáv oszcillátorok rendszere is képes a szinkronizációra.

#### **A lineáris oszcillátorok szinkronizációja:**

Legyen  $E_1^{(k)} < E_2^{(k)} < E_3^{(k)} < \dots < E_{m_k}^{(k)} = 1$  a rendszerben lévő oszcillátorok állapothatározói a  $(k + 1)$ -edik lavina előtt. Minden  $E_i^{(k)}$  értéknek megfelel egy  $C_i$  csoport  $N_i^{(k)}$  taggal. Legyen egy ciklus az az idő, ami alatt az összes  $m_k$  csoport pontosan egy lavinán esett át. Ahhoz, hogy követni tudjuk a rendszer változását, bevezetjük az  $s_{ij}^{(k)} = E_i^{(k)} - E_j^{(k)}$  jelölést a  $C_i$  és  $C_j$  csoportok közötti energiakülönbségre. Ha bármely  $s_{ij}^{(k)}$  kisebb lesz, mint  $N_i^{(k)}\delta$ , akkor a következő lavinánál az  $C_i$  és  $C_j$  csoport összeolvad. Egy ciklus lejártá után  $s_{ij}^{(k+1)} = s_{ij}^{(k)} + (N_j - N_i)\delta$  lesz. A többi csoporttól érkező hatást azért nem vesszük figyelembe, mert az oszcillátorok lineárisak és a hatás mindkét csoportra azonosan érvényesül. Ha  $N_j > N_i$ , az azt jelenti, hogy a  $C_j$  bekebelezi  $C_i$ -t, azaz a nagyobb csoport vonzza a kisebbet. A vonzás akkor léphet fel ha léteznek különböző létszámú csoportok. Ez nagyszámú oszcillátor esetén igen nagy valószínűséggel fordul elő. Páratlan számú oszcillátor esetén a probléma fel sem tevődik.[3]

**Konkáv oszcillátorok:**



2. ábra. Konkáv oszcillátor

A konkáv oszcillátorok energia függvényét a legegyszerűbben  $E_i(t) = t^a$ ,  $a > 1$  alakban írható. Ahogyan a fenti ábrán (2. ábra) is látható, ebben az esetben a küszöbértékhez közeledő, egymástól  $\tau$  fáziskülönbségre lévő oszcillátorok közti  $E_{i+1}(t) - E_i(t)$  energiakülönbség növekszik. Azonban ez nem kizáró ok a szinkronizációra nézve. Ugyanis, ha az első oszcillátor vagy oszcillátor csoport  $\delta$  impulzusa elegendő ahhoz, hogy a két oszcillátor egyszerre süljön ki, akkor – az adszorpció szabályának megfelelően – a jövőben is fázisban maradnak.

Az a lineáris oszcillátorok esetéhez képest, a csoportok egymásra gyakorolt vonzása mellett itt megjelenik egy szétszóró tényező, ami az energiafüggvény alakjának tulajdonítható.

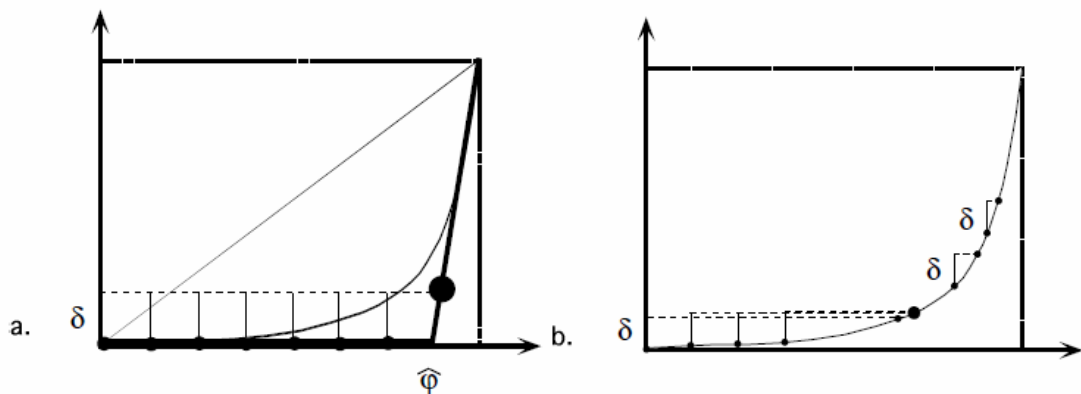
S. Bottani levezette, hogy kis konkavítás esetén, azaz  $a$  nem sokkal nagyobb 1-nél, a teljes szinkronizáció esélye a kezdőfázisok véletlenszerű eloszlása esetén:

$$P = 1 - \frac{(1-a)}{2ab} \left[ \left(1 - \frac{b}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{b}{2}\right) + \frac{b}{2} \ln\left(\frac{b}{2}\right) \right] + o\left(\frac{(1-a)^2}{a^2}\right),$$

ahol  $a$  a konkavítási tényező és  $b$

a disszipációs tényező.

Vagyis a szinkronizáció valószínűsége független az oszcillátorok számától.



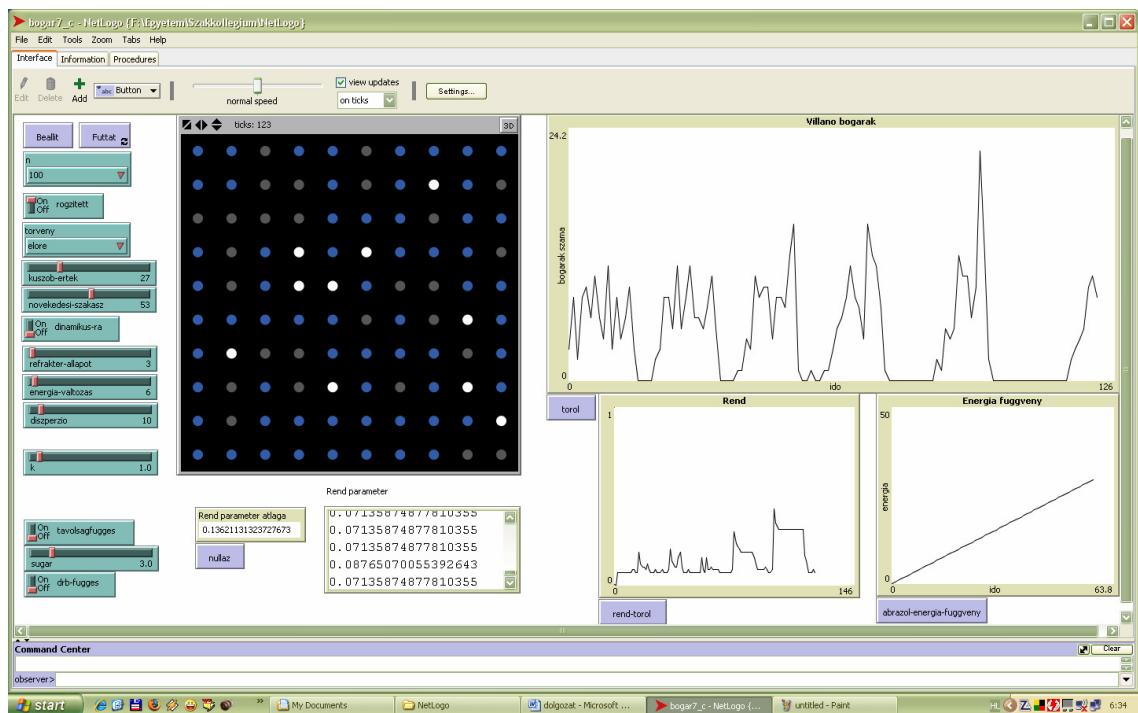
3. ábra. Nagy konkavitású oszcillátor

Ha  $a$  konkavitási tényező értéke jóval nagyobb mint egy, ez érdekes módon kedvez a szinkronizációnak. Könnyen belátható, ha alkalmazzuk a 3. ábra a. pontjában lévő közelítést, vagyis a görbét kicseréljük két egyenes szakaszra. Így, ha egy oszcillátor eléri a küszöbértéket, az összes nulla szinten levő oszcillátor energiája  $\delta$  lesz, azaz máris részben szinkronizálódtak. A b. pontban látható a valós folyamat, ami annyiban különbözik az előzőtől, hogy a az impulzust fogadó oszcillátorok energiaszintje nem esik éppen egybe, de nagyon közel kerülnek egymáshoz, és amint az első eléri a küszöbértéket, egy lavinát fognak alkotni.[3]

## A szimuláció

Az általam írt szimuláció a NetLogo programozási környezetben készült. A NetLogo egy modellezésre kifejlesztett ingyenes objektum-orientált nyelv. Nagy előnye a könnyű grafikus megjelenítés és az egyszerű applet készítési lehetőség, ami lehetővé teszi az elkészített modellek honlapokra való beépítését. (<http://ccl.northwestern.edu/netlogo/>)

Szimuláció a tüzelő oszcillátorok modelljére épült. De nem csak a fent leírt eseteket lehet beállítani. Kiindulásként a tűzlegyek szinkronizációját vettem a alapul. Majd kiegészítettem a modellt, hogy nagyobb oszcillátorcsaládot lehessen szimulálni vele.



Az oszcillátorokat körök szimbolizálják, amelyeknek az állapotuk függvényében meghatározott színük van. A kék a növekedési szakaszt, a fehér a relaxációs szakaszt, azaz az impulzus kibocsátást, a szürke a refrakter állapotot jelöli.

Az oszcillátorok egy tóruszon helyezkednek el.



A program paramétereinek beállítására a baloldali gombsort használjuk.

A „Beallit” gomb létrehozza a az „n” listáról kiválasztott számú oszcillátort, és kezdő fázisukat véletlenszerűen állítja be.

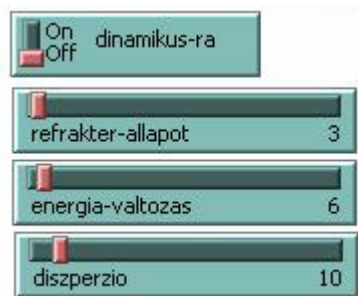
A „Futtat” gomb indítja el a szimulációt, és ugyanez állítja le.

A „rozitett” kapcsolóval megszabható, hogy az oszcillátorok rácspontokba legyenek-e rögzítve, vagy szabadon mozoghassanak a már említett tórusz felületén.

A „torveny” legördíthető listából kiválasztható, hogy az impulzusoknak serkentő vagy gátló hatása legyen. Ezt a két esetet az „előre” és „hátra” lehetőségek szimbolizálják, mivel az első esetben, az oszcillátorok fázisban előre, míg a másodikban fázisban hátra lépnek.

A „kuszob-ertek” és „novekedesi-szakasz” csúszkákkal megszabható a növekedési szakasz illetve a küszöbérték nagysága.



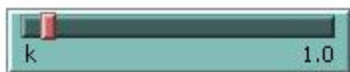


A „dinamikus-ra” kapcsoló azt állítja be, hogy az oszcillátorok a kisülés után, addig maradjanak refrakter állapotban, amíg a teljes lavina ki nem sül, a lavina hosszától függetlenül, vagy egy bizonyos idő után, lépjenek ki a refrakter állapotból, akkor is, ha még tart a lavina. Az utóbbi a kikapcsolt állapot.

A „refrakter-allapot” csúszka, csak akkor aktív, ha az előző kapcsoló kikapcsolt állásban van. Ekkor beállítja a refrakter állapot hosszát.

Az „energia-változás” csúszka a „drb-fugges” kikapcsolt állapota esetén, azt küszöbértékhez viszonyított százalékban megadott értéket szabja meg, amellyel egy oszcillátor növeli az energiáját felvillanás érzékelése eseté. Ha a „drb-fugges” be van kapcsolva, akkor az  $a$  disszipációs tényezőt jelöli, ugyancsak százalékban, a  $\delta = \alpha E_0 / N$  összefüggésből.

A „diszperzio” csúszka beállítja a növekedési szakasz szórását százalékban megadva. Így véletlen faktort vihetünk az oszcillátorok periódusába. Az energia függvény viszont változatlan marad.



A „k” az energia függvény konkavítását / konvekxitását határozza meg. Az energia függvényt az egyszerűség kedvéért  $E(t) = t^k$  alakba írtam. Így  $k < 1$  esetben konvex,  $k > 1$  esetben konkáv,  $k = 1$  re lineáris a függvény.



A „tavolsagfugges” kapcsoló, határozza meg, hogy az elemek globálisan (kikapcsolt állapot) vagy sugárra korlátozva legyenek csatolva (bekapcsolt állapot).

A „sugár” csúszka a „távolságfüggés” be állásában aktív.

Az határozza meg, hogy egy oszcillátor tőle milyen távolságra kibocsátott impulzusokra legyen még érzékeny. Ha az oszcillátorok rácsra vannak rögzítve, a távolságegység az elemi rácscella élhossza, szabadon mozgó oszcillátoroknál a körök átmérője az egység.

A „drb-fugges” azt határozza meg, hogy az impulzusok összegződjenek, ez a bekapcsolt állapot, vagy sem, ez a kikapcsolt állapot.

A rendszer állapotáról a információt a „Villanó bogarak” és „Rend ” grafikonok valamint a „Rend paraméter átlaga” és „Rend paraméter” kimenetek adnak.

A „Villanó bogarak” grafikon az ugyanabban az időegységben felvillanó oszcillátorok

számát ábrázolja az idő függvényében. A grafikon törlését a „töröl” gomb teszi lehetővé.

A rend paraméter a rendszert szinkronizációs fokát jellemzi. Nulla az értéke, ha a rendszer teljesen rendezetlen, és 1 ha teljes a szinkron.

A „Rend” grafikon a rend paraméter pillanatnyi értékét ábrázolja az idő függvényében. Erről a grafikonról lehet megállapítani, hogy a rendszer mikor ment át fázisátalakuláson, ugyanis ilyenkor a rend paraméter ugrásszerűen megnövekszik. Ez a grafikon is törölhető, hasonlóan az előzőhöz. A „Rend paraméter” kimenete a rend paraméter pillanatnyi értékét listázza ki, míg „Rend paraméter átlaga” ennek átlagát mutatja. Ez utóbbi visszaállítható nullára. A „Rend” grafikonon egy piros vonal jelzi, hogy honnan idült újra az átlag számítása.

Az „Energia függvény” grafikon egy kiegészítő grafikon, ami az alatta lévő gombra kattintva az éppen aktuális energia függvényt ábrázolja ki.

## **Összefoglaló**

A fent ismertetett szimuláció nagyszerű lehetőséget nyújt a tüzelő oszcillátorok rendszerének tanulmányozására. Egy általános program, mellyel ki lehet próbálni mások által már tanulmányozott eseteket, akár azokat is amelyeket a dolgozat első felében ismertettem. Vagy kísérletezni lehet a különböző paraméterbeállításokkal a tüzelő oszcillátor-rendszerek viselkedésének megértésének érdekében.

Hivatkozások:

[1] S.H. Strogatz, Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order (Hyperion, New York, 2003)

[2] Z. Néda and E. Ravasz, T. Vicsek, Y. Brechet, A. L. Barabási: Physics of the rhythmic applause. Physical Review Volume 61, Number 6, 2000 június

[3] S. Bottani: Synchronization of Integrate and Fire oscillators with global coupling ([arXiv:cond-mat/9607056v1](https://arxiv.org/abs/cond-mat/9607056v1) 1996)

## Függelék

(a szimuláció forráskódja)

```
globals [r]
turtles-own [t tk en s v]

to beallit
clear-all
set-default-shape turtles "circle"
set r []
crt n
kezd
ifelse rogzitett [racs]
    [veletlen]
end

to kezd
ask turtles
[
set color blue
set v 0
set tk round (novekedesi-szakasz * (1 + (2 * (random-float diszperzio) - diszperzio) / 100))
ifelse dinamikus-ra
    [set t random (tk + 1)
    ifelse t >= tk
        [set color white
        set tk round (novekedesi-szakasz * (1 + (2 * (random-float diszperzio) - diszperzio) / 100))]
        [set en energia t
        set s t]
    ]
[set t random (tk + 2 + refrakter-allapot)
ifelse t < tk
    [set en energia t]
    [ifelse t = tk
        [set color white
        set tk round (novekedesi-szakasz * (1 + (2 * (random-float diszperzio) - diszperzio) / 100))]
        [set color gray - 2
        set s t + refrakter-allapot]
    ]
]
]

end

to racs
let a round (sqrt n)
ask turtles
[
set xcor ((who mod a) * 33 / a) + (33 - a) / (2 * a)
set ycor ((int (who / a)) * 33 / a) + (33 - a) / (2 * a)
]
```

```

    facexy 16 16
  ]
end

to veetlen
ask turtles [setxy random-xcor random-ycor]
end

to futtat

abrazol
output-print rend-parameter
ask turtles with [color = blue]
[
  set t (t + 1)
  set s (s + 1)
  set en (en + novekveny t + hatas)
  if en < 0 [set en 0]
  set t inv-energia en
  if t >= tk [set v 1
    set en 0
    set t 0]
]
ask turtles with [color != blue]
[
  set s (s + 1)
  ifelse dinamikus-ra [ifelse count turtles with [v = 1] > 0 [set color gray - 2]
    [
      set color blue
    ]
    [
      ifelse(s < (refrakter-allapot + 1)) [set color gray - 2]
      [
        set color blue
      ]
    ]
  ]
]
if not rogzitett [lep]

ask turtles with [v = 1] [set color white
  set v 0
  set s 0
  set tk round (novekedesi-szakasz * (1 + (2 * (random-float diszperzio) -
diszperzio) / 100))
]
tick
end

to-report u-k-ertek

```

```

report kuszob-ertek * kuszob-ertek / (energ novekedesi-szakasz ((1 + diszperzio / 100)*
novekedesi-szakasz) kuszob-ertek)
end

```

```

to-report energia [p]
report energ p ((1 + diszperzio / 100)* novekedesi-szakasz) u-k-ertek
end

```

```

to-report inv-energia [y]
report round inv-energ y ((1 + diszperzio / 100)* novekedesi-szakasz) u-k-ertek
end

```

```

to-report energ [i n-szakasz k-ertek]
report ((i / n-szakasz) ^ k)* k-ertek
end

```

```

to-report inv-energ [q n-szakasz k-ertek]
report (((q / k-ertek)^(1 / k)) * n-szakasz)
end

```

```

to-report rend-parameter

```

```

let f sort [(tk - t)] of turtles
let ft but-last f
set f but-first f
let g 0
let dt (map [?1 - ?2] f ft)
foreach dt [set g (g + minimum ? (tmax - ?))]

```

```

set g (g / (n - 1))
if g > (tmax / n) [set g tmax / n]
let rnd (1 - g * n / tmax)
if length r > 10000 [nullaz]
set r fput rnd r
abrazol-rend rnd
report rnd
end

```

```

to-report tmax
ifelse dinamikus-ra
[report max [tk] of turtles + 1]
[report max [tk] of turtles + refrakter-allapot + 1]
end

```

```

to-report e-e-atlag
ifelse (n mod 2 = 0) [report tmax * n / (4 * n - 4)]
[report tmax * (n + 1)/(4 * n)]
end

```

```

to-report minimum [a1 a2]
  ifelse a2 > a1 [report a1]
    [report a2]
end

to-report p-kuszob-ertek
  report energia (novekedesi-szakasz * (1 + (2 * (random-float diszperzio) - diszperzio) / 100))
end

to-report novekveny [i]
  report ((energia i) - (energia (i - 1)))
end

to-report hatas
  let w 0
  if drb > 0 [set w energia-valtozas * kuszob-ertek / 100]
  if torveny = "hatra" [set w (-1 * w)]
  if drb-fugges [set w (drb * w / n)]
  report w
end

to-report drb
  ifelse tavolsagfugges
    [report count turtles in-radius a-sugar with [color = white and distance myself > 0]]
    [report count turtles with [color = white and distance myself > 0]]
end

to lep
  ask turtles [rt random 45
    lt random 45
    fd 1]
end

to abrazol
  set-current-plot "Villano bogarak"
  plot count turtles with [color = white]
end

to abrazol-rend [rnd]
  set-current-plot "Rend"
  set-current-plot-pen "default"
  plot rnd
  set-current-plot-pen "nulla"
  plot-pen-up
  plot 1
end

to abrazol-energia-fuggveny
  let a 0
  set-current-plot "Energia fuggveny"

```

```
clear-plot
repeat (round ((1 + diszperzio / 100) * novekedesi-szakasz)+ 1)
[
plot energia a
set a (a + 1)
]
end
```

```
to torol
set-current-plot "Villano bogarak"
clear-plot
end
```

```
to rend-torul
set-current-plot "Rend"
clear-plot
end
```

```
to nullaz
set r []
set-current-plot "Rend"
set-current-plot-pen "nulla"
plot-pen-down
plot 0
end
```

```
to-report a-sugar
ifelse not rogzitett [report sugar]
[report sugar * 33 / sqrt n]
end
```