



Babeş-Bolyai Tudományegyetem

## **Párolgás pohárból**

**Tyukodi Botond**

Fizika kar, II. évfolyam

Témavezetők

**Dr. Néda Zoltán** professzor

Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Fizika kar, Elméleti és számítógépes  
fizika tanszék

**Dr. Tunyogi Artúr** posztdoktori kutató

Babeş-Bolyai Tudományegyetem

# Tartalomjegyzék

Kivonat.....	3
1. Bevezető.....	4
1.1 A párolgás.....	4
1.2 Miért érdekes a párolgás? Hol használható?.....	4
1.3 Miért jön létre a párolgás?.....	5
1.4 A párolgás kinetikus értelmezése.....	5
2. A kísérlet.....	8
2.1 A kísérleti berendezés.....	8
2.2 A kísérlet menete.....	8
2.3 Kísérleti eredmények.....	9
3. A modell.....	18
4. Numerikus módszerek.....	21
5. A kísérleti és elméleti eredmények összevetése.....	21
6. Következtetések.....	23
7. Bibliográfia.....	24
8. Függelék.....	25
8.1 Visual C-ben írt interpolációs program.....	25
8.2 Visual C-ben írt predictor-corrector program.....	28

## Kivonat

Közismert tény, hogy egy lefedetlen pohárban található folyadék elpárolog az idő teltével. Kevésbé ismert azonban, hogy a párolgás során a párolgási sebesség folyamatosan csökken. Jelen dolgozatom célja ezen párolgási sebesség időfüggésének a kísérleti tanulmányozása, és a párolgási sebesség időbeli változásának a modellezése. Egy precíz digitális mérleg segítségével kontrollált körülmények közti kísérleteket végeztünk. A diffúziós folyamatok törvényeinek és a gázok kinetikus elméletének az alkalmazásával a tanulmányozott jelenségre egy egyszerű elméleti leírást adunk. Az elméleti eredményeink jó összhangban vannak a kísérleti eredményekkel. A jelenségre egy sokkal precízebb leírás is adható, figyelembe véve a valós hőmérsékleti ingadozásokat is. Ezen esetben modellünk csak numerikus módszerekkel kezelhető.

# 1. Bevezető

## 1.1 A párolgás

A párolgás az a folyamat, amely során a folyékony halmazállapotú anyag gáz halmazállapotba alakul át. A jelenséggel gyakran szembesülünk: párolog az óceánok, tavak vize, az élőlények szervezetéből párolog a folyadék, tulajdonképpen a párolgás a folyadékállapot velejárója. A jelenség leírása már azért is lényeges számunkra, mivel nap mint nap találkozunk vele.

## 1.2 Miért érdekes a párolgás? Hol használható?

A jelenség modellezése során megtalálhatjuk azon tényezőket, amelyek befolyásolják a párolgás sebességét, így magunk szabályozhatjuk azt, vagy éppen fordítva: a párolgás sebességéből következtethetünk az említett tényezőkre. A megfigyelések alapján adott folyadék esetében a párolgási sebességet lényegesen befolyásoló tényező például a hőmérséklet, és a párolgástérben levő levegő nedvességtartalma. Minél melegebb a folyadék, annál gyorsabban párolog, illetve minél nagyobb a levegő nedvességtartalma, annál lassabban párolog. Ugyancsak megfigyelhető, hogy a párolgó folyadék lehül. Köztudott, hogy a verejték szerepe a test hőmérsékletének csökkentése, ugyanakkor megfigyelhető, hogy nagy nedvességtartalmú légtérben (üvegházban, trópuson) a test ugyanazon hőmérsékleten jobban túlmelegszik, mint száraz levegőben, mivel a verejték lassabban párolog, és így kevesebb hőt képes elvonni időegység alatt a testtől. Ugyanakkor egy ventilátor vagy legyező csökkenti a folyadék körüli nedvességtartalmat, ezáltal elősegítve a párolgást.

A mezőgazdaságban számottevő hatása van a párolgásnak, mivel mind a növények, mind a talaj párologtat, ezt a hiányt pedig pótolni kell.

Mivel a párolgás globális szintű jelenség (hiszen óriási felületeken megy végbe), tanulmányozásának nagy szerepe van a meteorológiában.

A párolgás jelenségének felhasználása széleskörű, de talán a leggyakoribb a keverékek szétválasztása. Például sót vonnak ki a tengervízből úgy, hogy hagyják a vizet elpárologni, amíg csak a só marad. Néhány kémiai reakció csak bizonyos folyadék jelenlétében zajlik le, és a végén párologtatással választják szét a reakcióterméket a folyadéktól.

### 1.3 Miért jön létre a párolgás?

A folyadékállapot a szilárd és a gáz halmazállapot közti átmenetnek tekinthető. A szilárd halmazállapotú anyagok teljesen rendezettek, míg a gáz halmazállapotú anyagok teljesen rendezetlenek, ezért a folyadék halmazállapot tanulmányozása meglehetősen bonyolult.

A párolgás azért jelentkezik, mert a folyadék molekulái folyamatos mozgásban vannak, és ütköznek egymással, ezáltal energiát cserélve. A felszín közelében lévő molekulák, amelyeknek elegendő a mozgási energiájuk ahhoz, hogy a felületi feszültséget leküzdjék, kilépnek. A folyamat addig megy végbe, amíg az összes folyadék el nem párologott. Nyilvánvaló, hogy csak bizonyos energia fölötti energiával rendelkező molekulák képesek kilépni a folyadékból, vagyis mindig a nagy energiájúak távoznak. Mivel a folyadékban egyre kisebb energiájú molekulák maradnak, a folyadék hűl.

### 1.4 A párolgás kinetikus értelmezése [2]

A továbbiakban adunk egy modellt, amely alapján a párolgási sebesség kvantitatívan is vizsgálható.

Feltételezzük, hogy a folyadékmolekulák sebesség szerinti eloszlása ugyanaz, mint az ideális gázban, vagyis Boltzmann eloszlás [3.1]. A molekulák bizonyos hányada rendelkezik azzal az energiával és a felületre merőleges sebességkomponenssel, hogy mozgási energiája rovasára legyőzze a folyadékmolekulák között fellépő vonzóerőt. Nyilvánvalóan ez a vonzóerő csak a felület közelében fog számítani, hiszen a folyadék belsejében az egy molekulára ható erők kiegyenlítik egymást.

Annak a feltétele, hogy az  $m$  tömegű és  $v$  sebességű molekula elhagyja a folyadékot:

$$\frac{mv^2}{2} \geq L \quad (1)$$

Így párolgásra csak azok a molekulák képesek, amelyeknek a folyadék felszínére merőleges sebessége nagyobb mint

$$v_0 = \sqrt{\frac{2L}{m}} \quad (2)$$

Vezessük be az

$$\alpha = \frac{m}{2kT} \quad (3)$$

jelölést. Azon molekulák koncentrációja, amelyek felületre merőleges sebességkomponense  $v$ ,  $v+dv$  között van [3.1]:

$$dn_f = n_f \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\alpha v^2} dv \quad (4)$$

ahol  $n_f$  a molekulakonzentráció a folyadékban.

Az egységnyi felületen végtelen kicsi  $dt$  idő alatt gáz halmazállapotba lépő  $v$  és  $v+dv$  közötti sebességekkel rendelkező molekulák azon lesznek, amelyek a  $vdt$  mélységű hasámban vannak. Egységnyi idő alatt egységnyi felületen tehát

$$dN_f = v dn_f \quad (5)$$

számú molekula lép ki. Másképp:

$$dN_f = n_f \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\alpha v^2} v dv \quad (6)$$

Kilépni csak azok a molekulák képesek, melyeknek sebességük nagyobb mint a kilépéshez szükséges minimális sebesség, így az egységnyi idő alatt egységnyi felületen elpárolgott molekulák száma:

$$N_f = n_f \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{1/2} \int_{v_0}^{\infty} e^{-\alpha v^2} v dv \quad (7)$$

Ha elvégezzük az integrálást, következik:

$$N_f = \frac{n_f}{2} \left( \frac{1}{\alpha \pi} \right)^{1/2} e^{-\alpha v_0^2} \quad (8)$$

Kilépés után a molekulák egy része visszamehet a folyadékba, ezt a folyamatot kondenzációnak nevezzük. Kondenzációra minden molekula képes, vagyis az egységnyi idő alatt egységnyi felületen kondenzálódó molekulák száma:

$$N_c = n_c \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha v^2} v dv = \frac{n_c}{2} \left( \frac{1}{\alpha \pi} \right)^{1/2} \quad (9)$$

ahol  $n_c$  a gáz állapotban lévő molekulák koncentrációja.

Ha a párolgás zárt térben megy végbe, kialakul a dinamikai egyensúly, vagyis az egységnyi idő alatt egységnyi felületen elpárolgott molekulák száma egyenlő az egységnyi idő alatt egységnyi felületen kondenzálódott molekulák számával. Így azonnal adódik a kapcsolat a gáz és a folyadékfázisban lévő molekulakonzentrációk között:

$$n_c = n_f e^{-\alpha v_0^2} \quad (10)$$

Mivel a folyadék állapotban a koncentráció közel állandó, levonható a következtetés, hogy zárt térben történő párolgáskor a folyadékfelszín fölötti térrészben egy időben állandó molekulakonzentráció jön létre. Ha az energiaveszteségektől eltekintünk, a hőmérséklet is állandó, vagyis a folyadék gőzeinek a nyomása is állandó érték lesz. Ezt a nyomást hívjuk telített gőznyomásnak. Mivel  $\alpha$  függ a hőmérséklettől, a telített gőzök koncentrációja, s így nyomása is hőmérsékletfüggő lesz.

## **2. A kísérlet**

### **2.1 A kísérleti berendezés**

Most, hogy már van egy modellünk zárt térben végbemenő párolgásra, célunk megvizsgálni, hogy mi történik, ha a párolgástér nem teljesen zárt. Ezért azt az esetet tanulmányozzuk, amikor egy folyadék egy pohárból párolog el, így tehát a párolgástér egyik oldalán nyitott lesz.

Ehhez egy jó közelítéssel henger alakú berzelius poharat tettünk egy milligramm pontosságú digitális mérlegre, amelybe etil alkoholt töltöttünk. Tudjuk, hogy a párolgás sebessége függ a hőmérséklettől, viszont meglehetősen bonyolult lett volna konstans hőmérsékletet tartani a berendezés körül. Ezért úgy döntöttünk, hogy mérjük a hőmérsékletet is. Dr. Tunyogi Artúr készített egy számítógéphez kapcsolható digitális hőmérőt, amely 0.1 fok pontossággal mért, egy interface-t a mérleghez, illetve egy számítógépes programot, amely 5 másodpercenként egy .log fájlba írta ki az eltelt időt, a hőmérsékletet, és a mérleg által mutatott értéket. A hőmérő egy kábel végén lévő szondán keresztül mérte a hőmérsékletet.

### **2.2 A kísérlet menete**

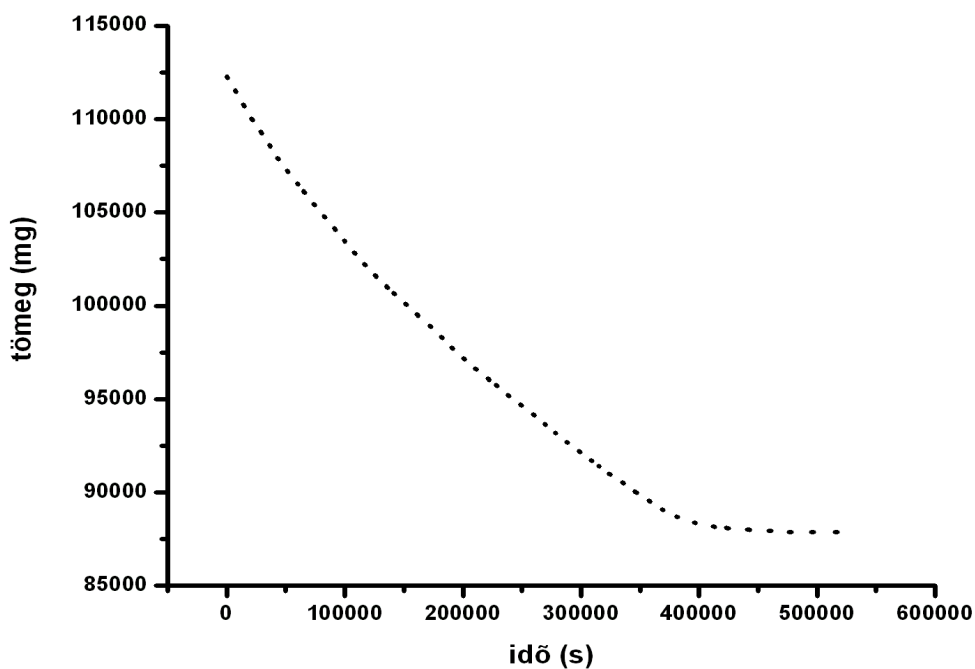
Első lépésben rátettük a poharat a mérlegre, és beállítottuk, hogy a pohár tömegére nullát mutasson, így a mért tömegértékeink mindig a pohárban lévő alkohol tömegével egyeznek meg. Az első mérésnél ezt elfelejtettük megtenni, ekkor a mérleg a pohár tömegét is mérte, de mivel ez konstans, az eredményeket nem befolyásolta. Ezután körülbelül háromnegyed magasságig töltöttük a poharat, és visszatettük a mérlegre. A hőmérő szondáját nem lehetett a mérlegen lévő pohárba tenni, mivel ez befolyásolja a mért tömegértékeket. Ugyanakkor nem lehetett csak a levegőben hagyni sem, mivel a párolgó folyadék hőmérséklete kisebb mint a körülötte lévő levegőé. Ezt úgy küszöböltük ki, hogy egy másik, az előzővel teljesen megegyező pohárba ugyanannyi alkoholt töltöttünk, ezt letettük a mérleg mellé, és ebbe tettük a szondát. A két pohárban lévő alkohol hőmérsékletének egyformának kell lenni, így elegendő, ha a második pohár hőmérsékletét mérjük. Ezek után elindítottuk a már említett számítógépes programot, amely 5 másodpercenként rögzítette a pohárban lévő alkohol tömegét, a hőmérsékletet, illetve az



eltelt időt, és addig hagytuk futni, míg az összes alkohol el nem párolgott a pohárból. Egy mérés kb. 6 napig tartott, ezalatt igyekeztünk minél kevesebbet járni a helyiségben, ezáltal is csökkentve a légmozgást.

### 2.3 Kísérleti eredmények

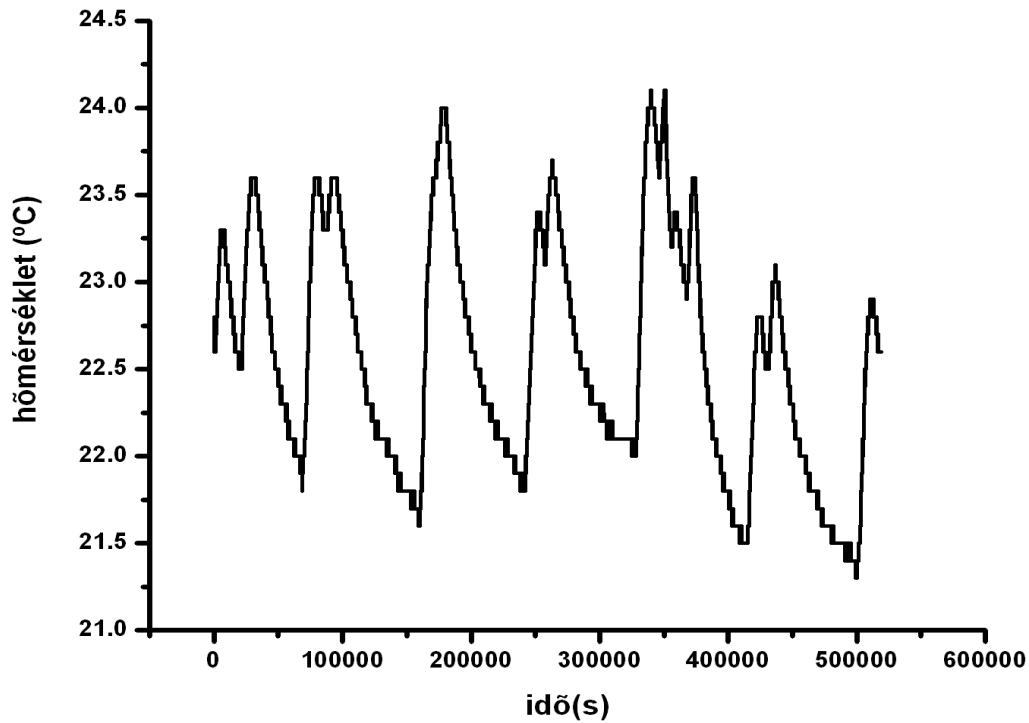
A különböző mérések alapján a pohárban lévő alkohol tömegének illetve hőmérsékletének időfüggése az alábbi grafikonokon látható.



*1. ábra. Első mérés: az alkohol tömege az idő függvényében*

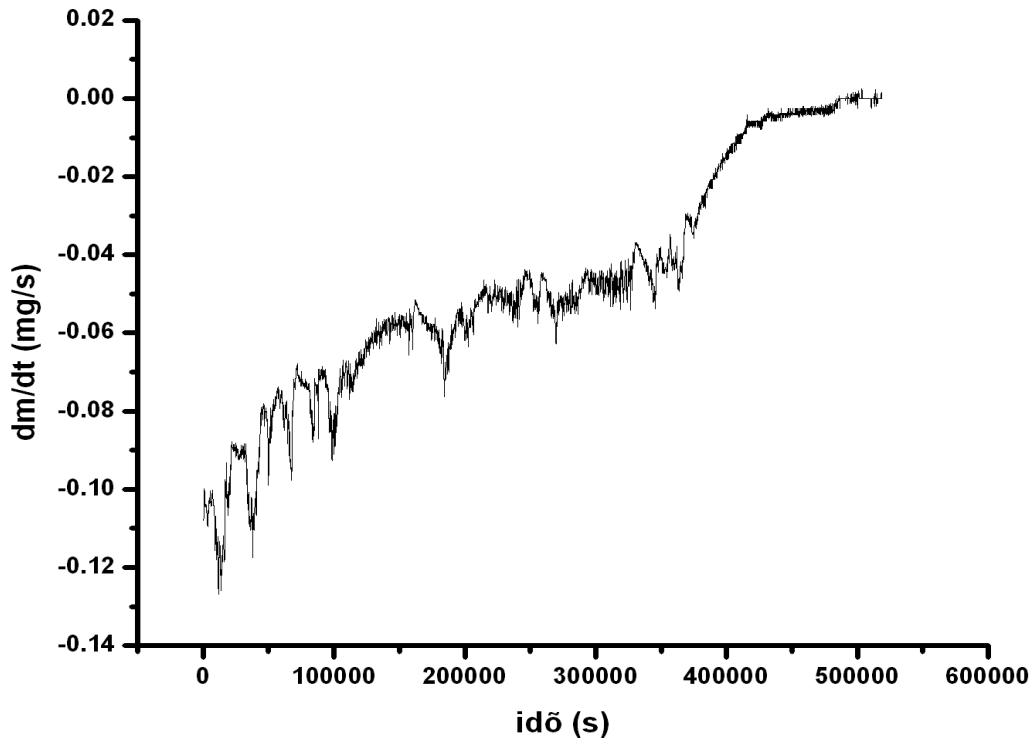
Az első mérésből származó tömeg-idő függvény az 1. ábrán látható. Megjegyezzük, hogy ennél a mérésnél a mérleg nem volt lenullázva, ezért nem a 0 értékhez tart a tömeg, hanem a pohár tömegéhez. A 2. ábrán látható, hogy ugyanezen mérés során hogyan változott a

hőmérséklet. Megfigyelhető, hogy a hőmérséklet kb 21.2 - 24.2 °C között változik. A periodikus változás az éjszakai-nappali hőmérsékletingadozásnak tulajdonítható.



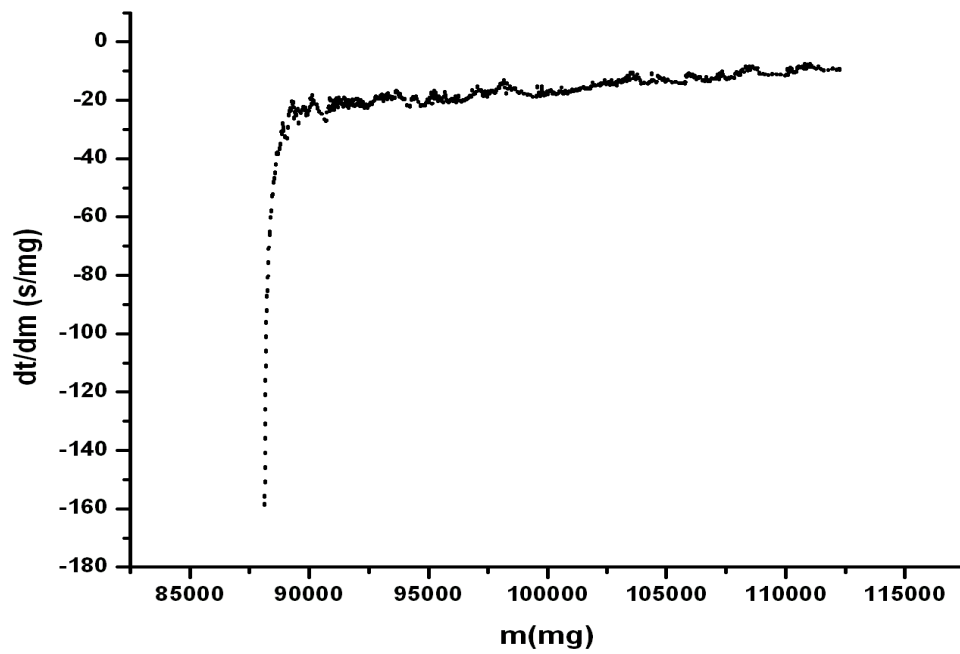
2. ábra. Első mérés: hőmérséklet az idő függvényében

Vizsgáljuk meg az 1. ábrán látható grafikon (tömeg az idő függvényében,  $m=m(t)$ ) idő szerinti deriváltját, ami nem más mint a párolgási sebesség. Ez a 3. ábrán van feltüntetve. Jól látszik, hogy ahogyan időben csökken az alkohol szintje a pohárban, úgy csökken a párolgási sebesség is.

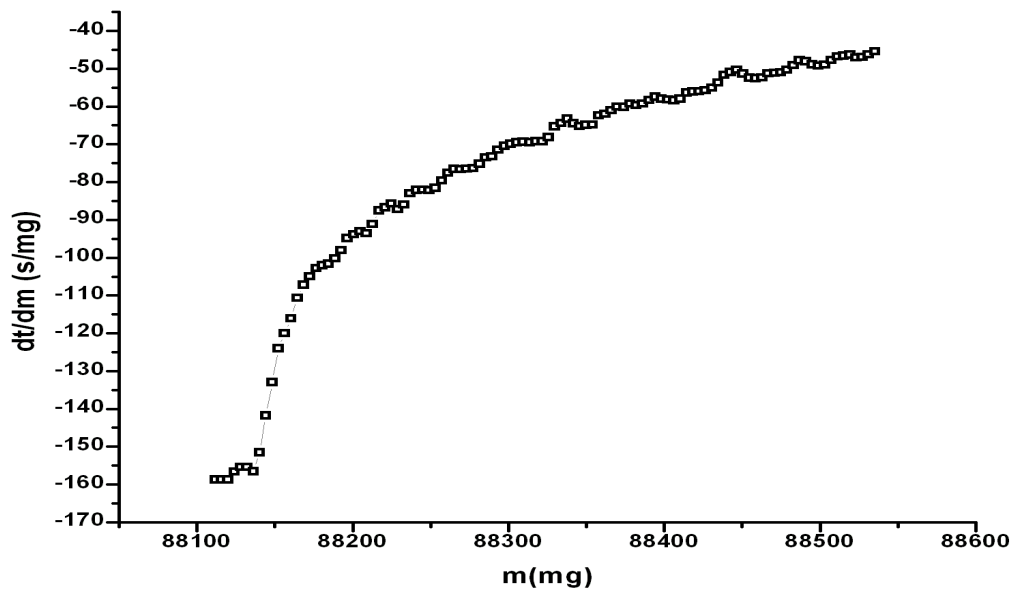


3. ábra. Első mérés: a párolgási sebesség az idő függvényében

Nézzük meg most, mi történik a tömeg-idő inverz függvényének ( $t=t(m)$ ) deriváltjával. Ez a függés a 4. ábrán van feltüntetve. Ezen a grafikonon már jól látszik, hogy megközelítőleg 90500 mg-os tömegérték felett és alatt a függvény közel lineáris. Az is jól látszik, hogy amikor már kevés alkohol van a pohárban, a párolgási sebesség hirtelen lecsökken. Ez egyébként már a 3. ábrán lévő grafikonból is jól látszik, hiszen a 90500-as tömegértéknek megfelelő pillanatnál (334000 s környékén) törés észlelhető: a grafikon meredekebb lesz, vagyis a párolgási sebesség gyorsabban kezd csökkenni. Mivel az edény keresztmetszete 11.64 négyzetcentiméter, az alkohol sűrűsége  $700 \text{ kg/m}^3$ , a töréskor a pohárban lévő alkohol szintjére kb. 3.6 mm-t kapunk. Ennél a magasságnal változik hirtelen a párolgási sebesség.

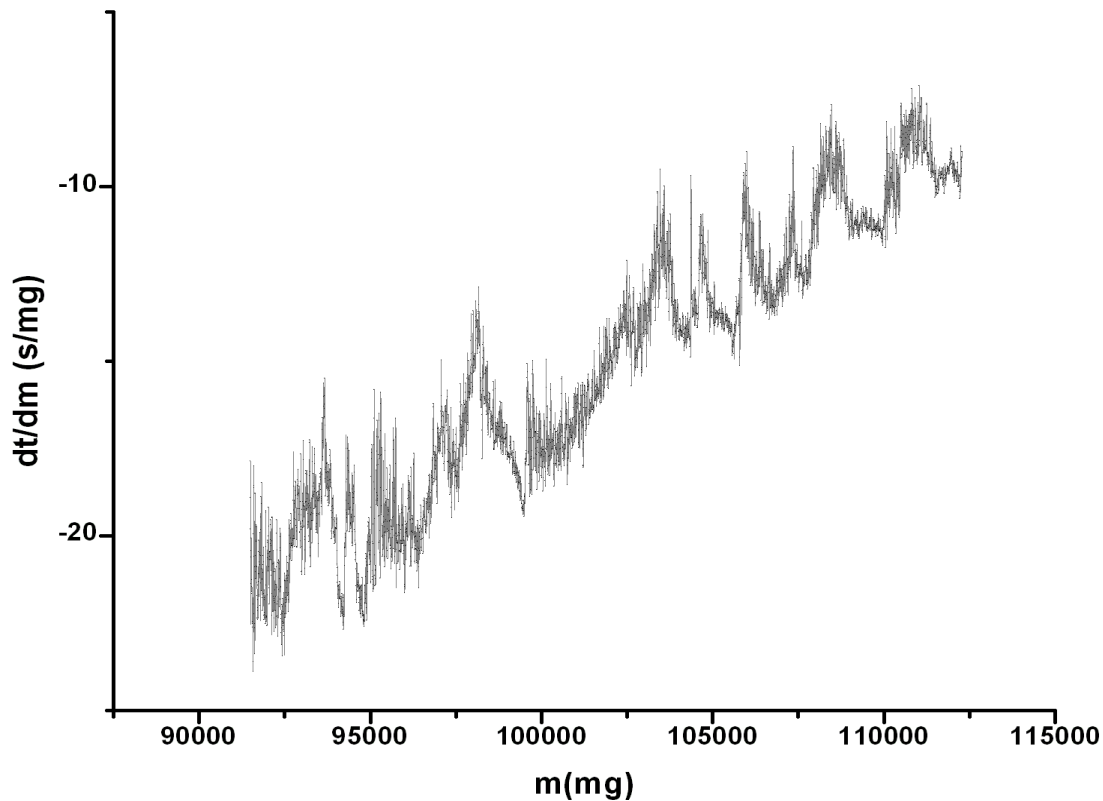


4. ábra. Első mérés: a  $t=t(m)$  függvény  $m$  szerinti deriváltja



5. ábra. Első mérés: a  $dt/dm$  grafikon első része

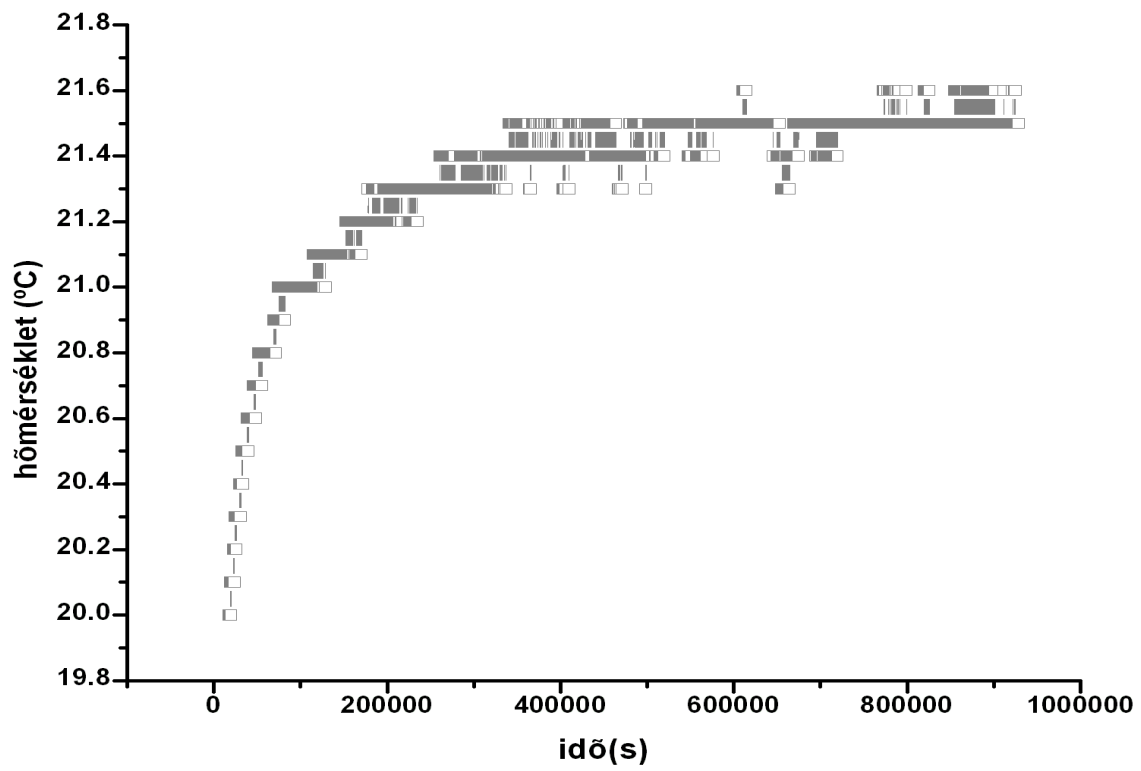
Nagyítsuk ki a 4. ábrán látható görbe két ágát. Az első ágat az 5., míg a másodikat a 6. ábrán láthatjuk.



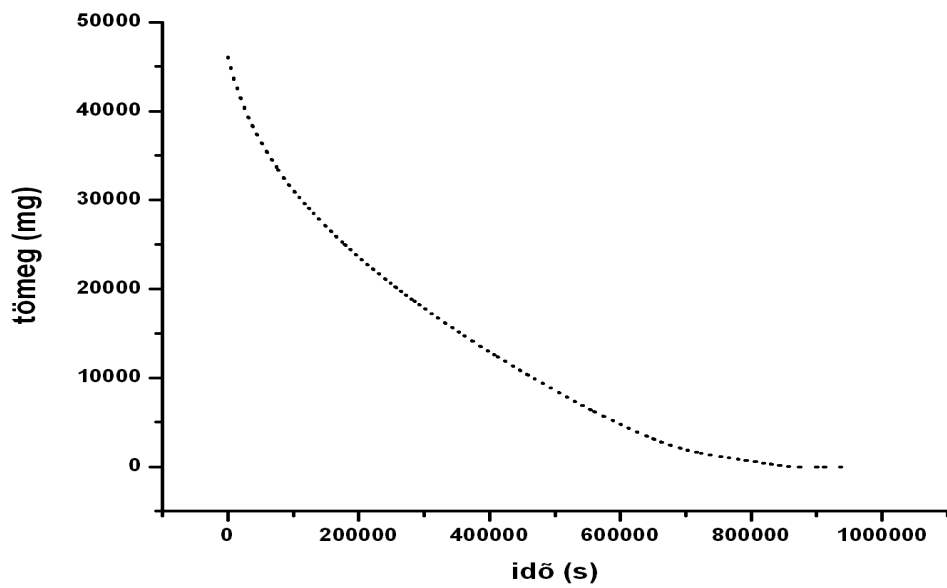
6. ábra. Első mérés: a  $dt/dm$  grafikon második része

Sajnos egyik grafikon sem elég sima ahhoz, hogy hogy analitikus függvényt fitteljünk rájuk (az 5. ábrán lévő simának látszik, viszont ez túl kevés pontból áll). Ez a 2. ábrán látható hirtelen hőmérsékletingadozásnak tulajdonítható.

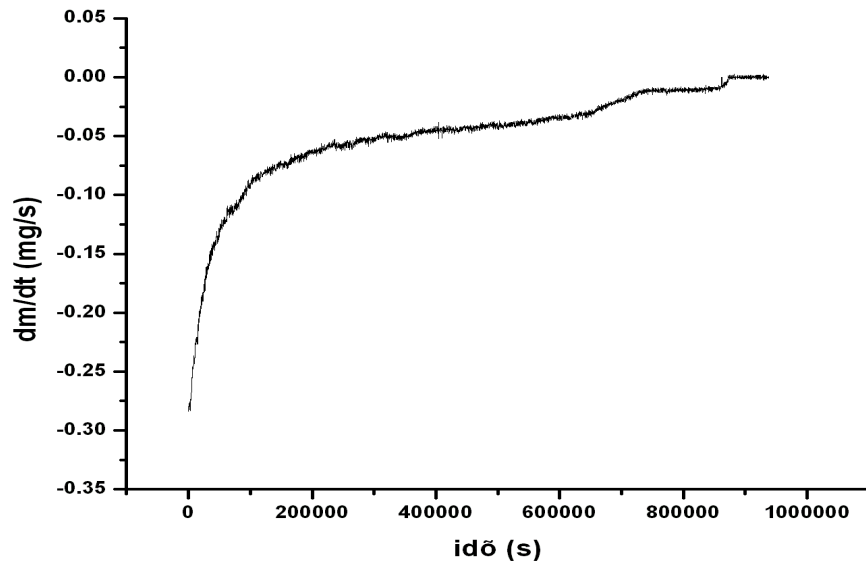
A továbbiakban nézzük meg ugyanezen mennyiségekre mért értékeket egy újabb mérés esetében. Itt a mérleg a pohárral le volt nullázva, tehát a tömegértékek a nullához fognak tartani. Először a hőmérséklet-idő függvényt ábrázoljuk a 7. ábrán. Látszik, hogy az idő legnagyobb részében konstans a hőmérséklet, ezért ettől a méréstől simább, de legalábbis szabályosabb görbéket várunk el.



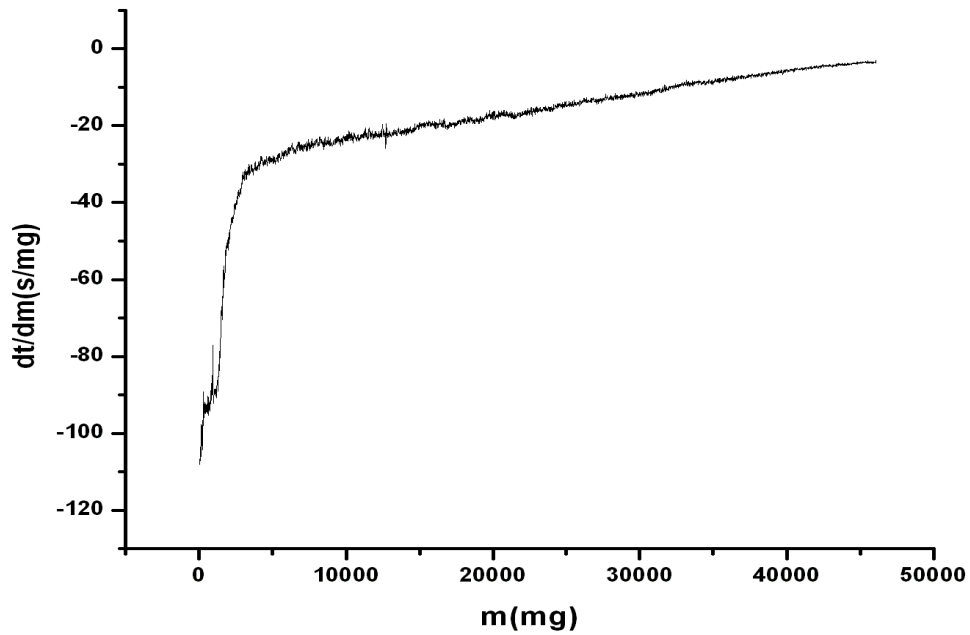
7. ábra. Második mérés: hőmérséklet az idő függvényében



8. ábra. Második mérés: tömeg az idő függvényében



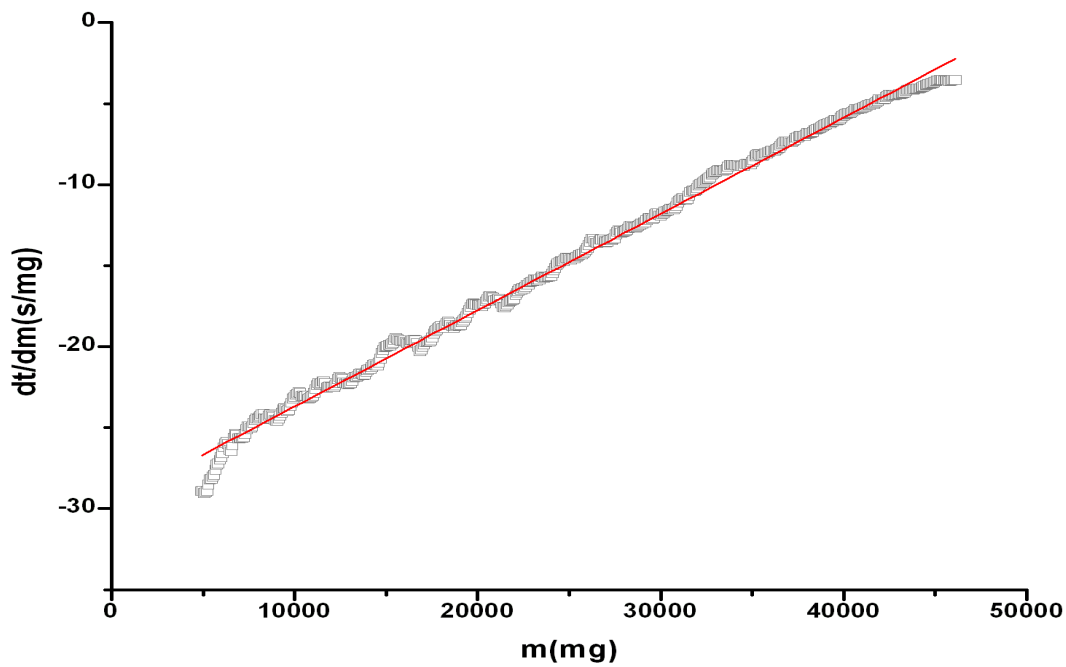
9. ábra. Második mérés: a párolgási sebesség az idő függvényében



10. ábra. Második mérés: a  $t=t(m)$  függvény deriváltja

Amint azt a 9. és 10. ábrán látjuk, ezek a görbék jóval simábbak az előző mérésben kaptaknál. Ábrázoljuk ismét külön a 10. ábra görbéjének második felét (az első felével most nem foglalkozunk). Ez az első mérés 6. ábrájának felelne meg.





11. ábra. Második mérés: a  $dt/dm$  grafikon második része

A piros vonal a mért értékekre fittelt egyenes. Levonható a következtetés, hogy közel állandó hőmérsékleten, addig, amíg van elég alkohol a pohárban (vagyis a 11. ábrán látható tartományban) a párolgási sebesség fordítottja és a tömeg között lineáris kapcsolat van.

A továbbiakban ezt az eredményt magyarázzuk egy, a gázok kinetikus elméletét és a diffúzió törvényeit felhasználó modellel.

### 3. A modell

Modellünk a párolgás 1.4-es részben bemutatott kinetikus értelmezéséből indul ki. Megmutattuk, hogy zárt térben való párolgás során a folyadék fölött telített gőz koncentráció alakul ki. Annak ellenére, hogy az általunk vizsgált kísérletben nyitott a párolgástér, jó közelítés az, hogy közvetlenül az alkohol szintje fölött az alkoholemolekulák koncentrációja a telített gőznyomásnak megfelelő koncentráció. Ez a közelítés azért helyes, mert az időegység alatt teljesen eltávozó molekulák száma sokkal kisebb mint az alkoholból kilépő, illetve az alkoholba visszalépő molekulák száma, így a dinamikai egyensúly könnyen helyreáll.

Mivel a folyadék felszínén a telített gőzök koncentrációja van (jelölje ezt  $n$ ), a poháron kívül viszont a koncentráció közel 0 (elég nagy a terem, amelyben a kísérlet zajlik). Ennek következtében fellép egy koncentrációgradiens, a koncentrációgradiensnek megfelelően pedig diffúzió megy végbe: a folyadékfelszín fölött található, elpárolgott molekulák egy része a diffúzió során kijut a pohárból.

Jelölje  $H$  a pohár magasságát,  $h(t)$  a folyadékszint távolságát a pohár aljától, koordinátarendszerünk  $z$  tengelye pedig mutasson a pohár aljától függőlegesen felfele. A diffúzió törvényének megfelelően[3.2]:

$$\frac{dN}{dt} = -DS \frac{dn}{dz} \quad (11)$$

ahol  $N$  a pohárból kilépő molekulák száma,  $S$  az edény keresztmetszete,  $D$  pedig a diffúziós állandó.

A koncentráció csökkenése az alkohol felszínétől a pohár tetejéig lineáris, mivel a folyamat stacionárius:

$$\frac{dn}{dz} \approx \frac{\Delta n}{\Delta z} = \frac{n}{H - h(t)} \quad (12)$$

Jelölje  $p$  a telített gőzök nyomását,  $p_0$  a légköri nyomást  $T$  az abszolút hőmérsékletet,  $k$  pedig a Boltzmann állandót. Ekkor:

$$n = \frac{p}{kT} \quad (13)$$

Ha  $\rho$  az alkohol sűrűsége,  $m(t)$  pedig a pohárban lévő alkohol tömege:

$$m(t) = \rho S h(t) \quad (14)$$

A (11)-es összefüggésbe behelyettesítve a (12), (13), (14)-et:

$$\frac{dN}{dt} = -DS \frac{p}{kT} \frac{\rho S}{\rho H S - m(t)} \quad (15)$$

Ha  $m_a$  egy alkohol molekula tömege:

$$N = \frac{m}{m_a} \quad (16)$$

A  $D$  diffúziós állandóra ismert összefüggés[3.3]:

$$D = \frac{1}{6} V \Lambda = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_a n_0}} \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2} \quad (17)$$

ahol  $V$  a molekulák átlagos sebessége,  $\Lambda$  a közepes úthossz,  $n_0$  a nitrogén koncentrációja (amely sokkal nagyobb mint az alkoholé),  $m_a$  az alkoholemekula tömege,  $d$  pedig a nitrogén-alkohol ütközés hatásátmérője. Az egyszerűség kedvéért a levegőt nitrogén gáznak tekintjük.

A (13)-as összefüggés alapján:

$$n_0 = \frac{p_0}{kT} \quad (18)$$

A (16), (17) és (18)-as összefüggést a (15)-ösbe helyettesítve a párolgási sebességre következik:

$$\frac{dm(t)}{dt} = c_1 \frac{p \sqrt{T}}{c_2 - m(t)} \quad (19)$$

ahol  $c_1$  és  $c_2$  állandók:

$$c_1 = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{k}{m_N}} \pi^{-3/2} \frac{1}{d^2} \frac{1}{p_0} S^2 \rho m_a \quad (20)$$

$$c_2 = \rho H S \quad (21)$$

Eredményül egy elsőrendű differenciálegyenletet kaptunk, amelyet állandó hőmérséklettel analitikusan is könnyedén megoldhatunk. Ha a hőmérséklet állandó, akkor a telített gőzök nyomása is állandó és így az egyenlet leegyszerűsödik:

$$\frac{dm(t)}{dt} = c_3 \frac{1}{c_2 - m(t)} \quad (22)$$

Ez az összefüggés indokolja a 11. ábrán látható grafikon egyenes alakját: ha a hőmérséklet közel állandó, akkor a  $\frac{dt}{dm}$  elsőfokú lesz m-ben.

A változók szétválasztása után:

$$t = \frac{c_2}{c_3} m - \frac{1}{c_3} \frac{m^2}{2} + K \quad (23)$$

ahol  $K$  integrálási állandó, és a kezdeti tömegeből határozható meg.

Az  $m(t)$  függvényre a (23)-ból a következőt kapjuk:

$$m(t) = c_2 - \sqrt{c_2^2 - (2c_3 t + 2K)} \quad (24)$$

Feltevődik a kérdés, hogy mi a teendő, amikor nem állandó hőmérséklettel van dolgunk. A válasz igen kézenfekvő: ilyenkor numerikus módszerekhez folyamodunk.

## 4. Numerikus módszerek

A telített gőzök nyomása hőmérsékletfüggő. A kísérlet során a hőmérséklet változott az idő függvényében, így a telített gőzök nyomása is. Mivel a hőmérséklet-idő függvényre csak diszkrét értékeink vannak, nincs egy analitikus függvényünk, ha figyelembe akarjuk venni a hőmérséklet változását, a problémát numerikusan kell kezelni.

Az alkohol telített gőzeinek a nyomásának hőmérséklettől való függése csak 5 fokként volt meg, és mivel a mérések ennél pontosabbak (a hőmérsékletet 0.1 fokként lehetett mérni), első lépésben interpolálni kellett a nyomás-hőmérséklet függvényt. Erre a köbös spline módszert alkalmaztam[4.1]. Következő lépésben szükség volt a telített gőz nyomására az idő függvényében, de mivel a hőmérséklet-idő és a nyomás-hőmérséklet függvény megvolt, ez egyszerűen ment.

Most már csak a (19)-es differenciálegyenletet kell megoldani. A módszer, amelyet használtam, a prediktor-korrektor módszer[4.2]. Lényege, hogy egyszerre 4 függvényértéket használ fel, ezek segítségével „megjósolja” a következőt, majd egy corrector lépésben ezt pontosítja. Nagy előnye a pontosságában rejlik, hiszen a hiba ötödrendű. Az első 4 értéket Runge-Kutta módszerrel[4.3] számítottam ki.

## 5. A kísérleti és elméleti eredmények összevetése

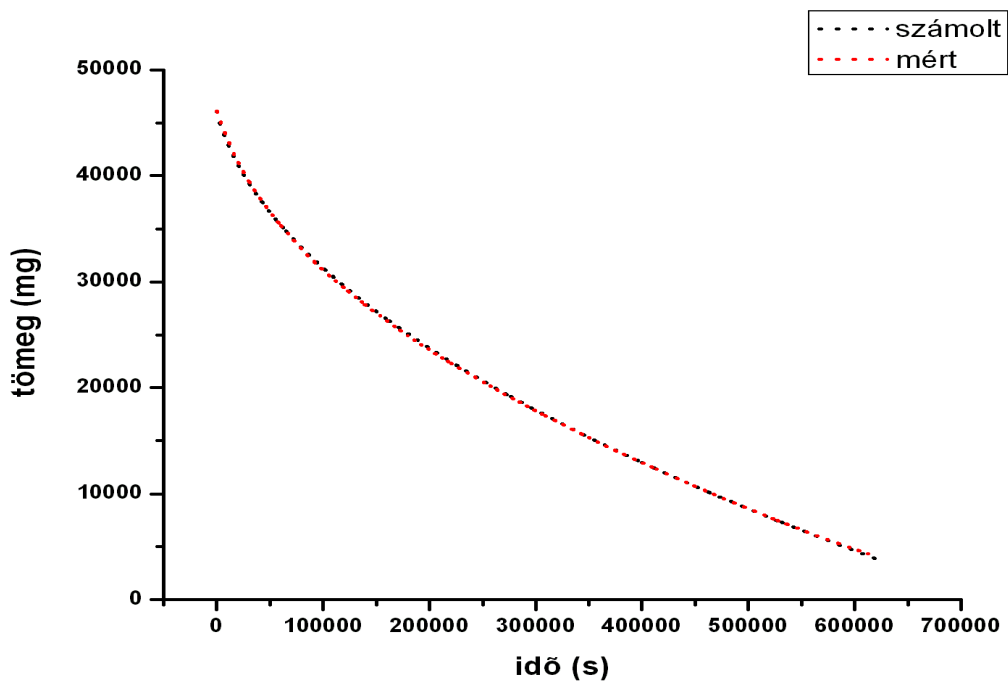
A továbbiakban a második mérés eredményeivel dolgozunk, és csak abban a tartományban amíg a  $dt/dm$  deriváltban nincs törés.

A (20)-as összefüggés által megadott  $c_2$  konstans kiszámítása egyszerű, hiszen minden mennyiség, amely meghatározza (sűrűség, magasság, felület), mérhető. Értékére 49515 mg adódott. Sokkal nagyobb gondot okoz a  $c_1$  kiszámítása, mivel ebben szerepel a molekulák hatásátmérője, amelyet pontatlanul ismerünk (nitrogén-nitrogén ütközésre kb. 0.37 nm [3.4]). Eltérés adódhat abból is, hogy a levegő nem csak nitrogénből áll. Mivel a hatásátmérőt nagyságrendileg ismerjük, a  $c_1$  -re ki tudunk számolni egy közelítő értéket. Ábrázoljuk az így

kapott elméleti eredményeket a kísérleti eredmények függvényében, és ha a modellünk helyes, egy egyenest kell kapjunk (hiszen a két eredmény csak egy konstans szorzóban különbözik egymástól). Ezek után úgy állítjuk be a  $c_1$  -et, hogy ez az egyenes lehetőleg egybeessen az első szögfelezővel.

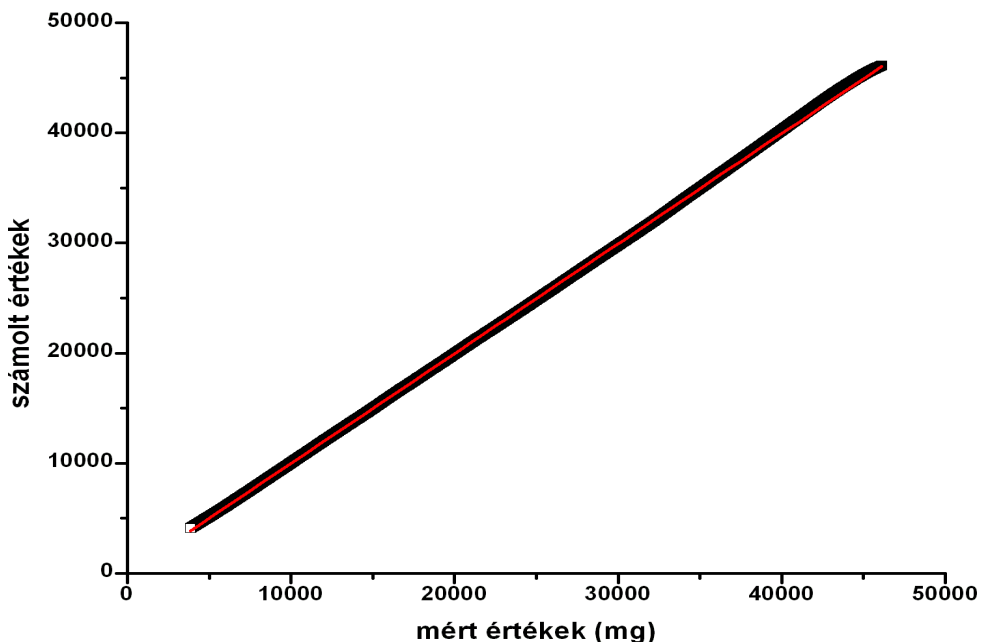
Így a  $c_1$  értékére  $-0.0154707 \text{ mg}^2/s$  adódik. Ha ebből visszszámoljuk a hatásátmérőt,  $0.40 \text{ nm}$ -t kapunk. Ha figyelembe vesszük a közelítéseket, ez egy nagyon jó eredmény.

A 12. ábrán a kísérleti és elméleti eredmények egy grafikonon való ábrázolása látható.



12. ábra. A mért és a számolt eredmények összehasonlítása

A 13. ábrán a a fekete vonal a számolt értékek - mért értékek függvényének grafikonja, míg a piros vonal az első szögfelező.



13. ábra. A számolt értékek a mért értékek függvényében

Megállapítható, hogy a modell és a kísérlet eredményei jól egyeznek.

## 6. Következtetések

Sikerült egy olyan modellt felépíteni, amely eredményei egy széles tartományban egyeznek a kísérleti eredményekkel. Megállapítottuk, hogy a pohárból párolgó folyadék párolgási sebessége folyamatosan csökken, és elméletileg is megmagyaráztuk a csökkenés okát. Hátra van azonban annak a magyarázata, hogy miért kezd olyan hirtelen csökkenni a párolgási sebesség, amikor már csak kevés folyadék van a pohárban. Le szeretnénk írni továbbá a párolgást granuláris anyagokból, és meg szeretnénk mutatni azokat a különbségeket, amelyek a most tárgyalt párolgás és a granuláris anyagból történő párolgás között felmerülnek.

## 7. Bibliográfia

[1]: <http://www.scienceclarified.com/EI-Ex/Evaporation.html>

[2]: Filep Emőd, Néda Árpád: Hőtan, *Erdélyi Tankönyvtanács, Kolozsvár, 2003*

[3]: Stephen J. Blundell, Katherine M. Blundell: Concepts in Thermal Physics, *Oxford University Press, 2006*

[3.1]: 34-52

[3.2]: 81

[3.3]: 83

[3.4]: 71

[4]: William H. Press, Saul A. Teukolsky: Numerical Recipes in C, *Cambridge University Press, 1988*

[4.1]: 113

[4.2]: 747

[4.3]: 710



## 8. Függlék

### 8.1 Visual C-ben írt interpolációs program

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <string>
using namespace std;

float * masodrendu_derivalt_vektor(float * T, float * p);
int lokalizal(float t, float * T);
float spline(float t, float * T, float * p);
int lokalizal(float t, float * T){
    int i=0;
    while (t>=T[i]){
        i=i+1;
    }
    return i-1;
}
float * masodrendu_derivalt_vektor(float*p,float*T){
    float * S=NULL;
    S=new float[15];
    float * a=NULL;
    a=new float[15];
    float * b=NULL;
    b=new float[15];
    float * c=NULL;
    c=new float[15];
    float * h=NULL;
    h=new float[15];
    float * d=NULL;
    d=new float[15];
    float * x=NULL;
    x=new float[13];
    float * dd=NULL;
    dd=new float[15];
    float * cc=NULL;
    cc=new float[15];
    int i;

    for (i=0;i<15;i+=1){
        h[i]=T[i+1]-T[i];
    }
}
```

```

a[0]=0;
c[0]=h[0];
b[0]=2*(h[0]+h[1]);
d[0]=6*((p[2]-p[1])/h[1]-(p[1]-p[0])/h[0]);

cc[0] = c[0] / b[0];
dd[0] = d[0] / b[0];

for (i=1; i<14; i+=1){
    a[i]=h[i-1];
    b[i]=2*h[i-1]+2*h[i];
    c[i]=h[i];
    d[i]=6*((p[i+2]-p[i+1])/h[i+1]-(p[i+1]-p[i])/h[i]);

}

for ( i=1; i<13; i+=1)
{
cc[i] = c[i] / (b[i] - cc[i - 1] * a[i]);
dd[i] = (d[i] - dd[i - 1] * a[i]) / (b[i] - cc[i - 1] * a[i]);

}

x[13] = d[13];
for(i = 12; i >= 0; i--){
    x[i] = dd[i] - cc[i] * x[i + 1];
}

S[0]=0;
S[15]=0;
for (i=0;i<14;i+=1){
    S[i+1]=x[i];
}
return S;
}

float spline(float t, float * T,float * p){
float A,B,C,D;
float * S=NULL;
S=new float[15];
float * h=NULL;
h=new float[15];
int i;

```

```

        i=lokalizal(t,T);
        for (int j=0;j<16;j+=1){
            S[j]=masodrendu_derivalt_vektor(p,T)[j];
            h[j]=T[j+1]-T[j];
        }
        A=(S[i+1]-S[i])/(6.0*h[i]);
        B=S[i]/2.0;
        C=(p[i+1]-p[i])/h[i]-(2*h[i]*S[i]+h[i]*S[i+1])/6;
        D=p[i];

        return A*(t-T[i])*(t-T[i])*(t-T[i])+B*(t-T[i])*(t-T[i])+C*(t-T[i])+D;

    }

void main(){

    int i;
    float b;
    float t;

    float * p=NULL;
    p=new float[15];
    FILE * GOZ;
    GOZ = fopen ("c:\\telitettgoz.txt","r");
    i=0;
    while (!feof(GOZ)){

        fseek(GOZ,0,SEEK_CUR);
        fscanf(GOZ,"%f",&b);

        p[i]=b;
        i=i+1;

    }
    fclose(GOZ);
    float * T=NULL;
    T=new float[15];
    i=0;
    for (i=0;i<16;i+=1){
        T[i]=5.0*i;
    }

    float * nyomashomerseklet=NULL;
    nyomashomerseklet=new float[300];

```

```

float z;

for (i=190;i<=220;i+=1){
    z=i/10.0;
    nyomashomerseklet[i]=spline(z,T,p)*133.3224;
    ofstream iras("nyomashomerseklet.txt",ios::app);
        iras<<(nyomashomerseklet[i]);
        iras<<"\n";
}
}

```

## 8.2 Visual C-ben írt predictor-corrector program

```

#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>
#include <iostream.h>
#include <fstream.h>
#include <string>

void main(){
    float b,p,T;           //tarolo
    float x0;             //ebben a pontban kell a fuggvény érték
    float k1;             //rungekutta egyutthatoi
    float k2;
    float k3;
    float k4;
    double h;             //leptek
    double f;             //a derivalt
    double x;             //fuggetlen változo
    double y;             //y(x)
    double ytarolo;      //ez a predictorhoz kell majd, ebbe taroljuk az y értéket
    int i,j;             //szamlalo

//-----idoertekek beolvasasa-----//

    float * ido=NULL;
    ido=new float[173000];

    FILE * IDO;
    IDO = fopen ("c:\\ido.txt","r");
    i=0;

```

```

while (!feof(IDO)){

fseek(IDO,0,SEEK_CUR);
fscanf(IDO,"%f",&b);

ido[i]=b;

i=i+1;

}
fclose(IDO);

//-----homerseklet ertekek beolvasasa-----//

float * homerseklet=NULL;
homerseklet=new float[173000];

FILE * HOMERSEKLET;
HOMERSEKLET = fopen ("c:\\homerseklet.txt","r");
i=0;
while (!feof(HOMERSEKLET)){

fseek(HOMERSEKLET,0,SEEK_CUR);
fscanf(HOMERSEKLET,"%f",&b);

homerseklet[i]=b+273.15;

i=i+1;

}
fclose(HOMERSEKLET);

//-----nyomas ertekek beolvasasa-----//

float * nyomas=NULL;
nyomas=new float[173000];

FILE * NYOMAS;
NYOMAS = fopen ("nyomasido.txt","r");
i=0;
while (!feof(NYOMAS)){

fseek(NYOMAS,0,SEEK_CUR);
fscanf(NYOMAS,"%f",&b);

```

```

nyomas[i]=b;

i=i+1;

}
fclose(NYOMAS);

float * a=NULL;    //ez egy tomb az elso 4 derivalt ertekek a predictorhoz
a = new float[4];

double c1=-1666.666;  //(dy/dx)=c1/(c2-y)
float c2=49515;
double c11=-0.0154707; //ez a szamlalo, amikor dy/dx=c11*sqrt(homerseklet)*nyomas/(c2-y)

x0=620000;
h=0.01;
y=46107.0;    //rogzitjuk a kezdeti ertekeket
x=0;

for (i=1;i<=4;i+=1) {
    f=c1/(c2-y);
    k1=f;
    k2=c1/(c2-(y+(h/2.0)*k1));
    k3=c1/(c2-(y+(h/2)*k2));
    k4=c1/(c2-(y+h*k3));
    y=y+(1/6.0)*h*(k1+2*k2+2*k3+k4);
    x=x+h;
    a[i]=f;
}

double f1,f2,f3,f4,f5; //predictorhoz a derivaltak

f1=a[1];
f2=a[2];
f3=a[3];
f4=a[4];

j=0;

//-----itt kezdodik a predictor-----//

i=0;
while (x<x0){

```

```

if (x<ido[i]){
    T=homeraseklet[i];
    p=nyomas[i];
}

else{
    i=i+1;

    ofstream iras("predict.txt",ios::app);
    iras<<("%f",x);
    iras<<"\t";
    iras<<("%f",y);
    iras<<"\r";
}

j=j+1;
ytarolo=y;      //fontos lepes!!!
x=x+h;
y = y + h*((-9)*f1 + 37*f2 - 59*f3 + 55*f4)/24;
f5=p*sqrt(T)*c11/(c2-y); //f5 = c11 * nyomas[i]*sqrt(homeraseklet[i])/(c2 - y);
y = ytarolo + h*(f2 - 5*f3 + 19*f4 + 9*f5)/24;

f1=f2;
f2=f3;
f3=f4;
f4=f5;

}
}

```