

Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Fizika Kar

# **Frusztrált hálózatok klasztereződése**

XI. ETDK

**Varga Melinda**

**Molnár Botond**

Témavezetők:

Dr. Prof. Néda Zoltán

Drd. Ercsey-Ravasz Mária

2008

# Absztrakt

A politikában, gazdaságban és a társadalomban létező rendszerek tulajdonságait erősen befolyásolják az elemek között lévő kapcsolatok, kölcsönhatások. Ezek a társadalmi kapcsolatok egy hierarchikus struktúrájú, bonyolult topológiával rendelkező frusztrált hálózatot alkotnak, amelyben érdekes és komplex feladatnak ígérkezik a szociális koalíciók (klaszterek) kialakulási folyamatainak vizsgálata. Egy viszonylag egyszerű, a statisztikus fizikában ismert Potts-üveghez hasonló, modellt használunk, amelyben leegyszerűsítjük a kölcsönhatásokat pozitív (vagy vonzó) és negatív (vagy taszító) kapcsolatokra. Belátható, hogy a rendszer koalíciókra szakad, hogy minél jobban megfeleljen az elemek közti kötéseknek. A modellt jellemző költségfüggvényt optimalizálva keressük az ideális klasztereződést a rendszerben. Globálisan csatolt hálók esetében már vizsgálták ezt a feladatot és érdekes jelenséget észleltek: a pozitív kötések gyakoriságának a függvényében az optimális állapotban a legnagyobb klaszter relatív mérete egy perkoláció szerű (geometriai) fázisátalakulást mutat. Mivel a globális csatolás nem teljesül a valós szociális hálózatok esetében, a feladatot most skálafüggetlen- és diluált hálózatokon vizsgáljuk két különböző módszerrel: egy sztochasztikus renormalizációs módszerrel és a szimulált hűtés módszerével. Eredményeink azt mutatják, hogy ez a fázisátalakulás továbbra is megmarad, ellenben a pozitív kötések arányának a kritikus értéke változik meg: minél nagyobb az átlagos fokszám a hálózatban annál nagyobb lesz ez a kritikus érték. Azonos átlagos fokszámmal rendelkező diluált és skálafüggetlen hálózatokat összehasonlítva az is kiderül, hogy a hálózat topológiájának is fontos szerepe van a rendparaméter-görbe alakjának megváltozásában.

# 1. Bevezető

Napjaink egyik érdekes és meglepő eredményeket nyújtó tudományága a hálózatok fizikája. A hálózatok nagyon különbözőek lehetnek, mégis ez a tudományág bizonyos általános tulajdonságokat vizsgál rámutatva a hálózatokat irányító törvényszerűségek egyetemességére. Mikor hálózatokról beszélünk, először mindannyiunknak az internet-, a telefon-, vagy az elektromos hálózatok jutnak eszünkbe, mivel ezeket a hétköznapi nyelven is hálózatoknak nevezzük, de valójában hálózatot alkotnak a településeket összekötő utak, egy nagy ismeretségi hálózat maga a társadalom, vagy ennek különböző részei, a gazdaságban és a politikában is hálózatokkal találkozunk. Definiálhatunk hálózatokat a biológiában és biokémiában is (pl. a szervezetünkben különböző funkciókat végrehajtó molekulák között) és még tovább sorolhatnánk a példákat.

A különböző szociális hálózatok tanulmányozása statisztikus fizikai módszerekkel ennek a tudományágnak egy része, amely a számítógépes szimulációs módszerek fejlődésével egyre érdekesebb eredmények feltárására nyújt lehetőséget. Nap mint nap észlelhetjük a politikában, a gazdaságban, a társadalomban a különböző koalíciók, csoportok közti versengéseket. Természetesen ezen koalíciók kialakulása leginkább az országok vagy pártok közti politikai kapcsolatok, a cégek közti gazdasági viszonyok, és a kis társaságok, illetve egyének közti kapcsolatok jellegétől függ. Ezek a társadalmi kapcsolatok egy hierarchikus struktúrájú, bonyolult topológiával rendelkező frusztrált hálózatot alkotnak.

Ezeknek a frusztrált hálózatoknak bizonyos általános tulajdonságai aránylag egyszerű fizikai modellek segítségével tanulmányozhatók. Ha leegyszerűsítjük a kölcsönhatásokat pozitív (vagy vonzó) és negatív (vagy taszító) kapcsolatokra (pozitív kapcsolatról beszélünk barátok vagy partnerek esetén, negatív kapcsolatról ellenségek vagy vetélytársak esetében) belátható, hogy a rendszer koalíciókra szakad, hogy minél jobban megfeleljen az egyének - vagy gazdasági hálózatok esetében a cégek - közti kötéseknek. Ideális csoport-szerveződés (klasztereződés) esetén az egy csoportban levő egyének közt csak vonzó, a különböző csoportokban levők között pedig csak taszító kölcsönhatás létezik. Természetesen ilyen ideális állapot nem mindig lehetséges, de

statisztikus fizikai módszerekkel meghatározható az optimális konfiguráció a rendszerben.

Ez a probléma egy frusztrált rendszer optimalizálása. A feladat komplexitása hasonlít más érdekes és közismert problémákhoz. Egyik példa a tekeredő fehérjeláncok problémája [1], amelyben nagyon bonyolult struktúrájú összetekeredett proteínláncmolekulák optimális helyzetét kell meghatározni. A szilárdtest fizikában sokat tanulmányozott spinűvegek esetében is hasonló komplexitású feladatokkal találkozunk [2], itt olyan anyagokat vizsgálunk, melyekben a molekulák saját mágneses nyomatékkal (spinnel) rendelkeznek és a kölcsönhatások következtében a molekulák spinjei különböző irányokba állhatnak be. Ezekben a rendszerekben az egyensúlyi állapot megkeresése egy hasonló komplexitású optimizációs probléma. Az “utazó ügynök” feladata egy másik ismert probléma, melyben egy ügynök különböző városokat kell bejárjon és keresi a legrövidebb utat [3]. Ezek a feladatok azért bonyolultak, mert a megoldásukhoz szükséges idő exponenciálisan nő a rendszer méretével (pl. a bejárt városok számával) [4], így annak ellenére, hogy kidolgozható egy algoritmus a feladat megoldására, nagyon nagy rendszerek esetén továbbra is megoldhatatlan feladatoknak minősülnek. Ezért ilyen feladatoknál gyakran közelítő módszereket kell alkalmazni.

Ebben a témakörben már készült egy tanulmány [5], amelyben több különböző módszerrel vizsgálták a koalíciók kialakulását globálisan csatolt hálózatokban, vagyis olyan hálózatokban amelyben mindenki mindenkivel összeköttetésben van. Az eredmények azt mutatták, hogy az optimális állapot nagyon különbözhet annak függvényében, hogy a rendszerben a pozitív vagy negatív kötések dominálnak. Ha a rendszerben a pozitív kapcsolatok vannak túlsúlyban, vagyis ha pl. a társadalomban a kolaborálási hajlam nagy, akkor egy nagy klaszter (angolul cluster: fűrt) alakul ki, ha viszont sok a negatív kötés a rendszerben, vagyis a konfliktusok nagyon gyakoriak, akkor minden egyén külön csoportot alkot. Nagyon kis rendszerek esetén a két véglet közti átmenet fokozatos, de nagy rendszerekben ez az átmenet nagyon gyorsan történik és egy érdekes fázisátalakulás mutatható ki.

Ennek a tanulmánynak az volt a fő hiányossága, hogy csak globálisan csatolt hálózatokat vizsgált. Ez csak nagyon kis valószínűségi hálózatok esetén lenne igaz, a nagyobb méretű szociális hálózatok nem teljesen csatoltak. Mi arra kerestük a választ,

hogy nem teljesen csatolt hálózatok esetén milyen fázisátalakulás tapasztalható, és a fázisátalakulás tulajdonságai (pl. az átmeneti pontot jellemző pozitív kötések sűrűsége) megváltoznak-e. Ennek érdekében kétféle nem teljesen csatolt hálót vizsgáltunk, véletlenszerű diluált hálókat és skálainvariáns hálózatokat. Arra is próbáltunk választ keresni, hogy az esetleges változások, hogyan függenek a hálózat topológiájától.

Optimalizációs módszerekként mindkét háló esetében két megközelítő módszert használtunk, mivel egzakt módszerek ilyen nagyobb méretű hálózatoknál nem megvalósíthatóak. Mindkét módszert használták globálisan csatolt rendszer esetén is, bár bizonyos változtatásokra is volt szükség. Az első a fizikában már jól ismert szimulált hűtés módszere, a második az úgynevezett sztochasztikus renormalizációs módszer, ami az [5] szerzői által kidolgozott egyszerű megközelítő módszerhez hasonlít, bár kisebb módosításokat tartalmaz.

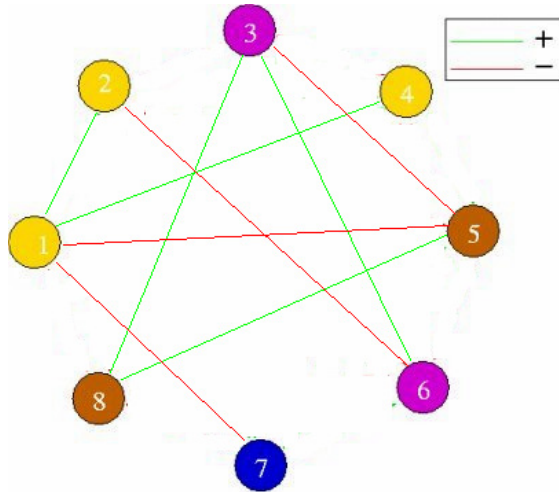
## 2. A klaszterezési feladat

### 2.1. A modell

A feladat konkrétabb áttekintéséhez nézzünk egy egyszerű modellt [5], amely segítségével szociális rendszerek klasztereződését, koalíciókra való szakadását vizsgáljuk. A valóságban a társadalmi, politikai, gazdasági, stb. kapcsolatok folyton változnak, a modell viszont az egyszerűsítés kedvéért feltételezi, hogy a folyamat során (amíg a rendszer eljut az optimális állapotba) a kapcsolatok állandóak.

A modell lényege a következő: egy nem teljesen csatolt hálózatunk van, jelölje  $p$  a létező kötések arányát. Globálisan csatolt hálók esetén  $p=1$ . Az  $N$  csomópont az egyedeket, a köztük levő kötések pedig a kapcsolatokat jelképezik. Az egyszerűség kedvéért minden egyed azonos rangú és azonos súllyal bír a hálózatban. A kapcsolatok lehetnek *pozitívak*  $T_{ij}=+1$ , vagy *negatívak*  $T_{ij}=-1$  (zöld illetve piros színű kötések az 1. ábrán). A hálózatunkban véletlenszerűen osztjuk el a pozitív és negatív kötések, a pozitív kötések számának és a létező kötések számának arányát  $q$ -val jelöljük. A pozitív kötéssel kapcsolt egyének hajlamosak ugyanabban az állapotban lenni, szeretnek

ugyanazon a véleményen lenni, mondhatnánk, hogy „barátok”, míg a negatív kötéssel kapcsoltak általában különböző koalícióhoz tartoznak, ritkán vannak ugyanazon a véleményen („ellenségek”). Egy ilyen rendszerben koalíciók fognak kialakulni, mert minden egyén szeretne egy csoportba kerülni azokkal akikkel pozitív kapcsolata van, és távol szeretne maradni azoktól akikhez negatív kötés fűzi. A különböző koalíciókat a körök színe jelképezi. A megnekedett állapotokat, vagyis a koalíciók számát nem korlátozzuk a rendszerben, tehát minden csomó állapota  $\sigma_i=1, \dots, N$ . A lehetséges állapotok száma  $N$ , vagyis az is elő tud fordulni, hogy minden egyed más-más koalícióban található.



**1. ábra.** A hálózatban a csomók különböző állapotokban (koalíciókban) lehetnek, ezt a körök színe jelképezi. A létező kötések lehetnek pozitívak (zöld) illetve negatívak (piros).

Felmerül az a kérdés, hogyan fognak csoportokba rendeződni az egyének, ahhoz hogy a legjobban kielégüljenek a kapcsolatok. Ideális klasztereződés esetén minden klaszteren belül csak pozitív, a csoportok között pedig csak negatív kötések kellene hogy legyenek. Rögtön belátható azonban, hogy ez nem mindig (sőt nagyobb rendszerek esetén szinte soha nem) lehetséges. A feladat megoldásához a statisztikus fizika módszereit használva definiálható a rendszer energiája, amely annál nagyobb minél erősebb a frusztráció a rendszerben. A fizikai rendszerek általános tulajdonsága, hogy igyekeznek eljutni mindig a legkisebb energiájú állapotba, amely az optimális vagy egyensúlyi állapot, tehát a rendszer energiáját minimalizálva találhatjuk meg az optimális állapotot.

Pár nagyon egyszerű megfontolásra alapozva az [5] tanulmány szerzői felírták a modellt jellemző energiafüggvényt és pár egyszerűsítés után arra a következtetésre jutottak, hogy az optimalizáció során a következő energiafüggvényt kell minimalizálni:

$$E = - \sum_{i < j} T_{ij} \delta_{\sigma(i)\sigma(j)}$$

Ahol  $T_{ij}$  a kötések előjele,  $\sigma(i)$  pedig az  $i$ -edik csomópont állapotát jelöli, azt hogy melyik koalíció tagja.

Mint már említettük az energia a rendszerben létező frusztrációt jellemzi. Sorra véve a kötések mindig eldönthető, hogy a jelenlegi állapot eleget tesz a kötés jellegének vagy nem. Ha pl. két egyén között pozitív kötés van és azonos csoporthoz tartoznak, akkor ez a kötés kedvező és nem növeli az energiát. Viszont ha pozitív a kötés de különböző koalíciókhoz tartoznak akkor már növeljük az energiát, mert a rendszer állapota nem tesz eleget a kötés jellegének. Teljesen hasonlóan negatív kötés esetén a frusztráció nő ha azonos csoporthoz tartoznak, tehát ilyenkor az energia értékét is növeljük.

Az általunk vizsgált modell nagyon hasonlít a Potts féle spinüveg modellhez [6,7]. A Potts féle spinüveg modellt eredetileg a szilárdtestfizikában vezették be olyan véletlenszerű struktúrával rendelkező nem mágneses anyagok modellálására, amelyek nem rendelkeznek tükrözési és rotációs szimmetriákkal. A gyakran használt szilárdtest fizikai és statisztikus fizikai alkalmazásai mellett, egyre érdekesebb alkalmazásokat nyer a szociológiai rendszerek vizsgálatánál [8-10]. A mi modellünk energiafüggvénye az  $N$  állapotot megengedő Potts modell energiafüggvényére hasonlít, ennek ellenére, amint azt az [5] tanulmány részletesen tárgyalja, több fontos különbség is van a modellek tulajdonságai és viselkedése között.

A rendszer optimális állapotának keresése során ezzel az energiaképlettel dolgoztunk, ennek az energiának kerestük a minimális értékét. A pozitív kötések arányának függvényében vizsgáltuk bizonyos jellemző mennyiségek változását. Már említettük, hogy ugyanezt a modellt már tanulmányozták globálisan csatolt hálózatok esetén [5], a vizsgált rendparaméter a legnagyobb koalíció relatív mérete volt.

Ugyanezt a rendparamétert vizsgáljuk mi is:

$$r(q) = \left\langle \max_{(i)} \left\{ \frac{C_x(i, q)}{N} \right\} \right\rangle_x$$

ahol  $C_x(i, q)$  az  $i$  állapotban levő elemek száma a kötéseknek egy  $x$  eloszlása esetén. Mivel a modellünkben az alapállapot (az optimális állapot) nagyon gyakran egy elfajult állapot, a koalícióknak több fajta konfigurációja rendelkezik ugyanakkora energiával és ezekben a legnagyobb klaszter mérete különbözhet, ezért a rendparaméter kiszámításánál átlagolunk ezekre az állapotokra nézve (ezt a felülvonás jelképezi) és ugyanakkor átlagolunk a kötések különböző megvalósulására is ( $\langle \rangle_x$ ).

## 2.2. Globálisan csatolt hálók klasztereződése

Mint már említettük a bevezetőben, ezt a problémát vizsgálták már globálisan csatolt hálók esetén [5]. Ebben a fejezetben ennek a kutatásnak az eredményeit szeretnénk röviden összefoglalni, mivel kulcsfontosságúak a mi eredményeink megértéséhez.

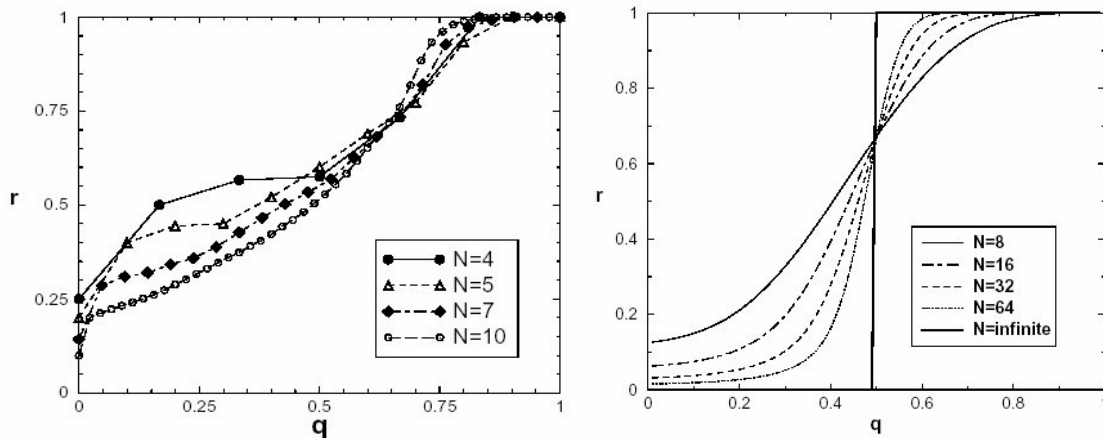
Az optimális állapotot különböző mennyiségekkel jellemezhetjük, mint pl. a kialakult koalíciók száma, a koalíciók átlagos mérete vagy a legnagyobb koalíció mérete. A legérdekesebb viselkedést mutató paraméter, amely egyértelmű fázisátalakulásra utal az a legnagyobb klaszternek a teljes rendszerhez viszonyított mérete ( $r$ ).

Az optimális állapotot jellemző mennyiségek nagyon függenek attól, hogy a rendszerben milyen a pozitív illetve negatív kötések aránya. Jelöljük  $q$ -val a pozitív kötések és az összes kötés számának arányát. Az könnyen belátható, hogy ha csak pozitív kötéseink vannak ( $q=1$ ) akkor egyetlen klaszter fog kialakulni ( $r=1$ ), ha pedig csak negatív kötéseink ( $q=0$ ) vannak akkor egyáltalán nem alakulnak ki koalíciók ( $r=1/N$ ), vagyis minden egyén egy külön csoportot képez. Úgy gondolnánk, hogy a két végső eset között lassú fokozatos átmenet van, de meglepő módon egy fázisátalakulásra utaló gyors átmenet észlelhető. A  $q$  paraméternek létezik egy kritikus értéke: egy végtelen nagy rendszerben ha a pozitív kötések aránya csak egy kicsivel is meghaladja ezt a kritikus értéket akkor egyetlen koalíció alakul ki, ha pedig a kritikus érték alatt van akkor



már egyáltalán nem alakulnak ki koalíciók. Végés rendszerekben az átmenet folytonos, de nagy rendszereknél nagyon gyors.

Több módszerrel vizsgálták a klasztereződési problémát globálisan csatolt hálók estén [5]. Mivel globálisan csatolt hálónál kevés csomópontból álló rendszert is tudtak vizsgálni (nem kellett a háló valamilyen topológiával rendelkezzen), egzakt eredményeik is vannak (2.a. ábra), és egy renormalizációs módszert használva analitikusan is megbecsülik a fázisátalakulás helyét, mely  $q=0.5$ -nek adódik (2.b. ábra).

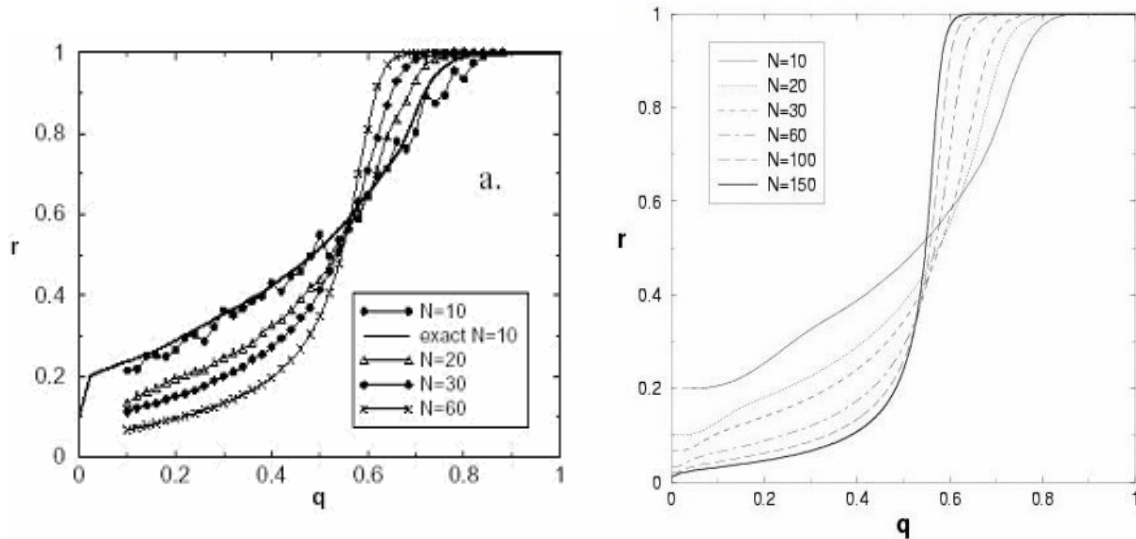


2. ábra. a) Egzakt eredmények b) Renormalizációs módszer eredményei.

Ugyanakkor a legfontosabb módszerek itt is a sztochasztikus, Monte Carlo típusú szimulációs módszerek. A szimulált hűtés és egy másik sztochasztikus renormalizációs módszer eredményei a 3. ábrán láthatók.

Látható, hogy az összes eredmény egy perkolációra emlékeztető geometriai fázisátalakulást mutat. Ez a fázisátalakulás az optimális állapotban a legnagyobb klaszter méretében jelentkezik a pozitív kötések valószínűségének függvényében. Az eredmények arra utalnak, hogy ha a rendszerben a pozitív kapcsolatok vannak túlsúlyban, vagyis ha pl. a társadalomban a kolaborálási hajlam nagy, akkor egy nagy alakul ki, ha viszont sok a negatív kötés a rendszerben, vagyis a konfliktusok nagyon gyakoriak, akkor minden egyén külön csoportot alkot. Nagyon kis rendszerek esetén a két véglet közti átmenet fokozatos, de nagy rendszerekben ez az átmenet nagyon gyorsan történik, a végtelen határesetben pedig egy lépcsőszerű függvényt kapunk. A globálisan csatolt hálózatokban ez a fázisátalakulás  $q=0.5$  értékénél történik. A következő fejezetekben azt fogjuk vizsgálni, hogy nem teljesen csatolt hálózatok esetén hogyan módosul ez a

fázisátalakulás.



3.ábra. a) Szimulált hűtés eredményei. b) A sztochasztikus renormalizációs módszer eredményei.

### 3. Hálózatok generálása

Ebben a fejezetben azokat a módszereket fogjuk bemutatni, amelyeket a tanulmányozott hálózatok előállítására, generálására használtunk. Amint az előbbi fejezetben bemutattuk, ezt a klaszterezési feladatot csak globálisan csatolt hálók esetén vizsgálták, ellenben ezek a globálisan csatolt hálók csak kis közösségek esetén tükrözik a valóságot. Egy egyszerű példaként tekintsünk egy kis falut, annak lakóit és azok viszonyát, kapcsolatait. Ebben az esetben fel tudunk állítani egy olyan modellt, amelyet az előbbi fejezetben ismertettünk, de ha már nagyobb településeket vizsgálunk - mint például városok, metropoliszok, országok - akkor rájövünk, hogy ez a globális csatolás már nem valósul meg. Ezek a hálózatok is összefüggőek, mert bármely pontjából valamilyen úton el lehet jutni egy akármelyik másik pontba, de nincsen minden csúcs direkt kötésben saját magán kívül minden más csúccsal. Ezért most olyan hálózatokat kerestünk, amelyek megfelelnek ezeknek az újabb kritériumoknak, és ezeken fogjuk vizsgálni a klaszterezési feladatot.

Ezeknek a nem globálisan csatolt hálózatoknak a vizsgálatakor az első

kézenfekvő közelítés az, ha véletlenszerű diluált hálókat generálunk. Ezeket egy globálisan csatolt hálózatból nyerjük, mindig véletlenszerűen kivéve a hálózatból a kötéseknek bizonyos százalékát. Itt azt vizsgáltuk, hogy a kötések sűrűsége hogyan befolyásolja a fázisátalakulást. Mivel a véletlenszerű diluált hálózatok is elég messze állnak a valós társadalmi rendszerektől, ezért egy olyan hálótípust is vizsgáltunk, amely jobban megközelíti a valós helyzetet. Ezek a skálafüggetlen, vagy más néven skálainvariáns hálózatok. A legtöbb nagy társadalmi háló struktúrája ilyen gráfokkal írható le. Itt két fontosabb hálógenerálási módszert is bemutatunk: a Barabási-Albert modellben alkalmazott preferenciális csatolás módszerét [11], illetve a konfigurációs modellt [12]. Mi a probléma vizsgálatakor végül a második módszert alkalmaztuk, mert kisebb rendszerek esetén sokkal pontosabb fokszám-eloszlással rendelkező hálókat tudunk vele generálni.

### 3.1. Véletlenszerű diluált hálózatok generálása

A célunk az volt, hogy olyan hálózatokat generáljunk, amellyel jobban meg tudjuk közelíteni a valós társadalmi rendszereket, ezért legelső megközelítésként véletlenszerű diluált hálókat vizsgáltunk.

Ebben az esetben kiindulásként generálunk egy hálót, amely globálisan csatolt, majd az össz kötésszám bizonyos százalékát kivesszük a rendszerből. A kötések mindig véletlenszerűen, azonos valószínűséggel választjuk. Ennek a diluált hálózatnak a legfontosabb jellemző paramétere, az hogy a kötéseknek hány százalékát vesszük ki a rendszerből. Ezt a paramétert jelöljük  $p_{ki}$ -vel. Így a rendszerben maradt kötések számát a következő egyszerű összefüggéssel tudjuk kiszámolni:

$$K = \frac{N \cdot (N - 1)}{2} \cdot (1 - p_{ki})$$

Ha ezt a paramétert túl nagyra vesszük, akkor látható, hogy a kötések száma nagyon lecsökken, így megnő annak az esélye, hogy a hálózatunk két kisebb, külön álló részre szakad. Nagyon fontos az, hogy a hálózatunk összefüggő legyen, amikor elértük a kívánt kötésszámot, mert ellenkező esetben olyan mintha a problémát két független, kisebb hálón végeznénk el. Ezért vigyáznunk kell, és folyamatosan ellenőriznünk, hogy a

generált háló összefüggő maradjon és csak olyan hálókra dolgozzunk, amelyek megfelelnek ennek a feltételnek, azaz, hogy bármely csúcsból bármelyikbe el lehet jutni.

A hálógenerálás algoritmusának fontosabb lépesei:

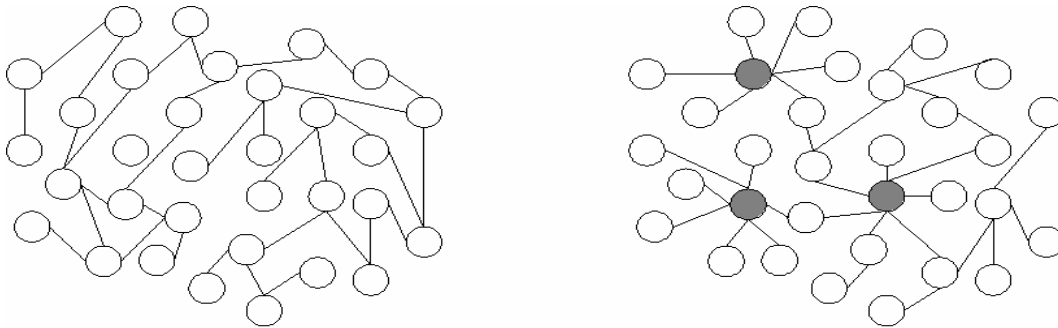
- globálisan csatolt háló generálása
- véletlenszerűen kiválasztunk egy kötést és kiütjük a rendszerből
- az előző lépést addig ismétljük, amíg el nem érjük a kívánt kötéssűrűséget
- leellenőrizzük, hogy az így kapott háló összefüggő-e, ha nem, akkor elvetjük és az egész generálást kezdjük előlről

A szimulációkat több méretű hálóra végeztük el: 20, 30, 40, 50, 100, 150, 200, 300, 400 és 500 csúcsot tartalmazó hálókra. Mindegyik háló esetében több esetet vizsgáltunk a kötések számának függvényében. Kis rendszereknél, a 20-as és 30-as hálók esetében, csak  $p_{ki}=85\%$ -ig mentünk el, hiszen a kötések száma a rendszerben nagyon hamar lecsökken és nehéz már olyan állapotot találni, amelyben a generált háló még összefüggő. A nagyobb hálók esetében (40, 50, 100)  $p_{ki}=90\%$ -ig, illetve (150, 200)  $p_{ki}=95\%$ -ig vizsgáltuk. Nagyon nagy rendszereknél, mivel a feladat megoldása eléggé időigényes, ezért csak nagyobb  $p_{ki}$  értékeket vizsgáltunk, hiszen ott várható érdekes viselkedés. A 300-as háló esetében csak 90% fölött (98%-ig) vizsgáltuk a viselkedést, továbbá a 400-as és 500-as hálók esetében pedig 99% fölött (99,9%-ig). Az 5% és 95% között minden 5%-os lépésre generáltunk egy hálót, a 300-as háló esetében 1%-os lépésekben, míg a 400-as és 500-as hálók esetében 0,1%-os lépésekkel. Minden egyes hálóra a szimulációs lépéseket többször elvégeztük, ezeket a módszereket a következő fejezetben ismertetjük részletesen.

## 3.2. Skálainvariás hálók

Barabási és Albert [11] a 90-es évek végén kezdtek foglalkozni a mindennapi életben fellelhető hálózatokkal. Addig úgy tartották, hogy az összes természetben és mesterséges úton létrejövő hálózat véletlenszerű (a csomópontok teljesen véletlenszerűen kapcsolódnak össze). Bármelyik hálózatról volt szó, alkosson akár olyan összetett rendszert, mint a társadalom, vagy a sejtek kémiai anyagai, esetleg a honlapokat

összekötő URL-ek, mindegyikről azt feltételezték, hogy véletlenszerűen rendeződnek el. De Barabási és kutatócsoportja arra a megállapításra jutott, hogy nem minden háló mutatja ezt a topológiát. Rámutattak arra, hogy ha a véletlenszerűség elvét alkalmazzuk az internetre, akkor "a legtöbb embernek nagyjából ugyanannyi barátja lenne, nagyon kevésnek lenne csak sokkal több vagy sokkal kevesebb. A világhálón ez nem így van: a legtöbb oldalra csak nagyon kevés más oldal mutat, ezek tehát majdnem láthatatlanok a világhálón, néhány oldalra pedig majdnem mindenki rámutat."



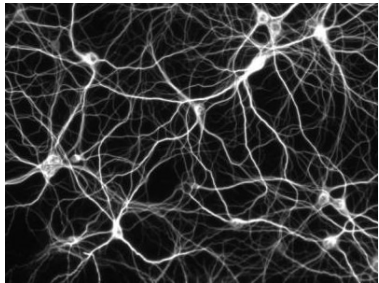
**4. ábra. a)** Véletlen háló vázlat. **b)** Skálafüggetlen háló vázlat.

Ezt a fajta hálózatot következő cikkükben elnevezték skálafüggetlen hálózatnak [11], arra a tényre alapozva, hogy nagyon széles tartományban változhat egy csomó kapcsolatainak a száma (fokszáma), nincs egy jól meghatározott skála. Később programot írtak az internet feltérképezésére, és ezzel tudták bizonyítani is a feltevésüket.

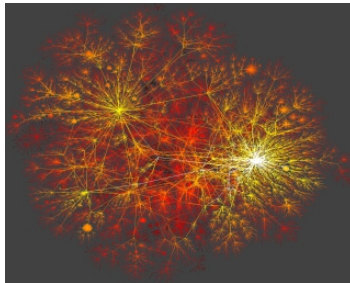
A skálainvariáns hálózatok alaptulajdonsága, hogy a fokszám-eloszlás egy hatványfüggvény. Vannak olyan csomópontjai a hálónak amelyek nagyon kevés, és vannak olyanok is amelyek nagyon sok kötéssel rendelkeznek. Az ilyen rendszerek rendkívül hibátűrők abban az értelemben, hogy véletlenül választott pontokat eltávolítva a rendszer továbbra is összefüggő marad; a legnagyobb csomópontok eltávolításától azonban darabjaira hull.

Az élet szinte minden területén találkozhatunk ilyen típusú hálókkal. Ilyen háló például a már sokat emlegetett Internet, a World Wide Web, ahol a csomópontok a honlapok a kapcsolat köztük pedig az URL. Szociális hálók is mutatnak ilyen topológiát: ismeretségi hálózatok (pl. színészek ismeretségi hálózata), szexuális hálózat, tudósok kapcsolatai. Biológia, orvostudomány területéről megemlíthetjük az idegsejtek alkotta hálózatot és a járványok terjedési útvonalait. A nyelv is ebbe a csoportba sorolható, ahol

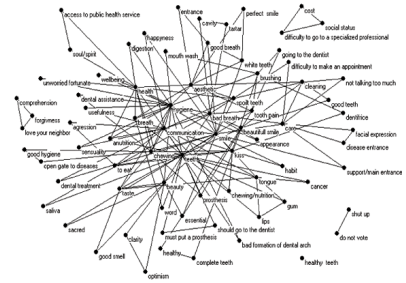
a csomópontok a szavak, amelyek különböző szintaktikai és nyelvtani szabályok betartásával vannak összekapcsolva. A tudományos irodalom is ilyen hálónak bizonyult, az idézettségi háló, ahol a csomók a publikációk, a kapcsolatok meg a hivatkozások.



idegsejtek



internet



szavak idézettsége

5. ábra. Példák skálafüggetlen hálózatokra.

A feladatunk első része az, hogy ilyen hálókat hozzunk létre. Két módszerrel próbálkoztunk: a Barabási-Albert modellel, amely a háló növekedését modellálja, a preferenciális csatolás elvét használva és egy kevésbé ismert módszerrel, a konfigurációs modellel, amely egy egzaktul definiált fokszám eloszlásfüggvény alapján építi fel a hálózatot.

### 3.2.1. Barabási-Albert modell

A modell, amit Barabási és Albert felállított nagyban különbözött más akkor megszokott modellektől: ők azt figyelték meg, hogy milyen szabályok szerint növekedik a rendszer, mi az ami meghatározza, hogy egy új csomópont hová kapcsolódjon. Azért tűnt ez jó megközelítésnek, mert a skálafüggetlen hálózatokra jellemző a folytonos növekedés, és pont ez a növekedés az ami alakítja a rendszert. Azt figyelték meg, hogy egy-egy új csomópont szívesebben kapcsolódik olyan csomóponthoz, amelyik kiterjedtebb kapcsolatrendszerrel rendelkezik, ezt nevezték el népszerűségi kapcsolódásnak.

A modell amit felállítottak nagyon egyszerű, a háló néhány ( $n$  darab) csomópontból indul, amelyek egy globálisan csatolt hálót alkotnak, mindegyik elem

minden más elemmel össze van kötve. Ez a központi mag aztán egy kétlépéses algoritmust követ:

- Növekedés: Egy új csomót kapcsolunk a rendszerbe  $m \leq n$  kapcsolattal, vagyis az új csomópont  $m$  darab már a rendszerben levő csomóponthoz fog kapcsolódni.
- Népszerűségi kapcsolódás: Az az  $m$  csomó, amelyekhez az újonnan érkezett kapcsolódni fog a fokszámuk függvényében lesznek kiválasztva. Az a csomó, amelyiknek sok szomszédja van nagyobb valószínűséggel lesz az új csomónak is a szomszédja, mint egy olyan csomópont, amelyik csupán néhány kapcsolattal rendelkezik.

Ez az algoritmus minden lépésben egy csomóponttal növeli a rendszert. Tehát csomópontonként készítünk el egy folytonosan bővülő hálót. Ez a modell volt az első sikeres kísérlet a középpontok (hub-ok) megmagyarázására. Ez volt az első olyan modell, amelyik a valódi hálózatokban a skálafüggetlen hatványfüggvényeket megmagyarázta, ezért hamarosan a **skálafüggetlen** modell néven vált ismertté.

A módszernek jó eredményei vannak nagyszámú csomópont esetén, de kisebb hálóknál nem túl pontos. Ezért használtunk egy másik módszert: a konfigurációs modellt.

### 3.2.2. Konfigurációs modell

Ez a módszer nem a hálók növelésével generál skálafüggetlen hálózatot, hanem eleve egy adott fokszám eloszlásból indul ki. Ennek a képlete:

$$n(k) = e^{-\alpha} \cdot k^{-\gamma}$$

Ez pontosan azt adja meg, hogy  $n(k)$  darab csomópont rendelkezik  $k$  darab kötéssel. Két fontos paraméterünk van: a  $\gamma$  határozza meg, hogy milyen meredek legyen a hatványfüggvény, az  $\alpha$  pedig a csomópontok számát befolyásolja. Tehát a képletből fog az is kijönni, hogy hány csomópontja lesz a hálónak.

A módszer nagyon pontos kis hálók esetén is, mert eleve egy hatványfüggvény típusú fokszám-eloszlást generál, a programunk csak azt kell megoldja, hogy melyik csomópont melyikkel legyen összekötve.

A módszer röviden a következő:

- Adott  $\alpha$  és  $\gamma$  értékre kiszámítjuk az  $n(k)$  értékeit. Az eloszlásfüggvény képlete valós számot ad, ezt egész számra kerekítjük, hiszen  $n(k)$  a  $k$  kötéssel rendelkező csomók számát jelöli. Az utolsó  $k$  érték amelyre az  $n(k)$  értéke még  $l$  fölött van lesz  $k_{max}$ , vagyis a legtöbb kötéssel rendelkező csomó fokszáma. Itt kiszámolható a csomók száma is  $N$ , illetve a hálóban létező kötések száma  $K$ :

$$N = \sum_{k=1}^{k_{max}} n(k)$$

$$K = \sum_{k=1}^{k_{max}} n(k) \cdot k$$

- Az  $n(k)$  tömböt felhasználva minden  $k=1, \dots, k_{max}$  értékre létrehozunk  $n(k)$  darab olyan csomót melynek  $k$  darab szabad (még sehova nem kötődő) kötése van. A szabad kötések számát egy tömbben tároljuk.
- Ha  $K$  páratlan, elhagyunk egy olyan csomót amelyik egy kötéssel rendelkezik, hiszen a szabad, párosításra váró kötések száma mindenképp páros kell legyen.
- Összekötjük a csomókat:
  - véletlenszerűen kiválasztunk két csomót
  - ha még nincs köztük kötés, akkor összekötjük őket. A létrehozott kapcsolatokat egy mátrixban tároljuk
  - csökkentjük a szabad kötéseik számát eggyel
  - kezdjük ezt a ciklust előlről, addig amíg a szabad kötések számát tároló tömb elemei mind lenullázódnak
- Ellenőrizzük, hogy összefüggő-e a hálózat, ha nem generálunk egy újat.

Az összekötésnél előfordulhat, hogy olyan csomóknak maradnak még kötéseik, amelyek össze vannak már kötve, vagy éppen nem lehet őket összekötni (egy csomónak marad két kötése). Ez esetben keresni kell egy olyan kötést amelyet ha elszakítunk, annak a két végpontját össze tudjuk kötni a megmaradt két kötéssel, és így megoldódik a probléma. Ha nem kapunk ilyen kötést, egy újabb hálót kell generálni.



## 4. Szimulációs módszerek

A rendszer optimális klasztereződésének megtalálásához sztochasztikus, Monte Carlo típusú optimalizációs módszereket alkalmaztunk. A klasszikus szimulált hűtés módszerét és egy egyszerűbb sztochasztikus renormalizációs módszert.

### 4.1. A szimulált hűtés módszere

A szimulált hűtés módszere egy jól ismert és sokat használt Monte Carlo típusú optimalizációs módszer [13].

Kezdetben az elemeket véletlenszerűen különböző állapotokba helyezzük, a kötések  $q$  valószínűséggel pozitívnak vesszük. A rendszert egy  $T_k$  kezdeti hőmérséklet értékkel jellemezzük, amelynek értékét a szimuláció során nagyon lassan csökkentjük. Minden  $T$  értéknél nagyon sok Monte Carlo lépést végzünk. Egy Monte Carlo lépés alatt  $N$ -szer végezzük el a következő lépéseket:

- Véletlenszerűen kiválasztunk egy elemet a rendszerből.
- Áthelyezzük véletlenszerűen egy másik állapotba (koalícióba).
- Kiszámítjuk, hogy mennyivel változott a rendszer energiája ( $\Delta E$ ).
- Ha csökkent az energia elfogadjuk ezt az állapotot.
- Ha nőtt az energia akkor is elfogadjuk  $\exp(-\Delta E/T)$  valószínűséggel.

Azért kell nagyon sokszor elvégezni ezeket a lépéseket, hogy lehetőleg minden elem sorra kerüljön. Majd csökkentjük a hőmérséklet értékét, és ismét elvégezzük ezeket a lépéseket. Ezt addig folytatjuk, amíg a hőmérséklet eléri a  $T_v$  végső értéket. Így megkapjuk egy adott  $q$  értékre (a pozitív kötések valószínűsége) és a kötések egy adott eloszlása esetén a rendszer optimális állapotát, de természetesen mindezt el kell végeznünk  $q$  több értékére és a kötések nagyon sok különböző eloszlása esetén.

Látható, hogy bizonyos valószínűséggel a rendszer energiáját növelő lépéseket is megengedünk, és ez a valószínűség a hőmérséklettől függ. A hűtési módszert frusztrált rendszerek esetén alkalmazzák. A mi modellünk is frusztrált és az energiának nagyon sok lokális minimuma létezik. Ha csak az energiát csökkentő lépéseket engedélyezzük a

rendszer könnyen bekerül egy ilyen lokális minimumba és nem kerülhet ki onnan. A hűtési módszer lényege az, hogy a hűtés elején amíg nagy a hőmérséklet, viszonylag nagy energiaváltozások megengedettek a rendszerben, majd nagyon lassan csökkentve a hőmérsékletet, egyre kisebb és kisebb fluktuációkat engedélyezünk, így megfelelő szimulációs paraméterekkel elérhető, hogy a rendszer a globális minimumba kerüljön. Sajnos soha nem lehetünk teljesen biztosak, hogy az energia elérte a globális minimumot, de a módszer elég jó megközelítést ad.

A mi szimulációink során a kezdeti hőmérséklet  $T_k=N/[-4*\log(0.8)]$ . Ez azt jelenti, hogy kezdetben egy viszonylag nagy ( $\Delta E=N/4$ ) értékű energiaváltozás is nagy valószínűséggel ( $0.8$ ) előfordulhat. A végső hőmérséklet  $T_v=0.1$ , és a hőmérséklet értékét  $0.98$ -as szorzótényezővel csökkentjük. Azt, hogy egy adott hőmérsékleten hány Monte Carlo lépést végzünk, mindig a rendszer méretének függvényében határoztuk meg: kisebb rendszereknél,  $N=25, 30, 40$ , elegendő  $200$  MC lépés,  $N=50$  esetében  $500$ ,  $N=70$  –nél  $700$ ,  $N=100,150$ -nél  $1000$  MC lépést végeztünk. A módszer nagyon időigényes mert minden  $q$  értéknél több hálón is el kell végezzük az optimalizálást, hogy megfelelő átlagot kapjunk. Ezért is nem tudtunk ezzel a módszerrel  $N=150$ -nél nagyobb rendszereket vizsgálni.

## 4.2. Stochasztikus renormalizációs módszer

A stochasztikus renormalizációs szimulációs módszer egy viszonylag egyszerű megközelítő optimalizációs módszer. A módszer által nyújtott eredmények jó megközelítéssel egyeznek a szimulált hűtés eredményeivel. Egyszerűsége ellenére a módszer előnye abban rejlik, hogy sokkal gyorsabb mint a szimulált hűtés és nagyobb rendszereket is lehet vizsgálni vele.

Egy hasonló módszert eredetileg globálisan csatolt hálókra dolgoztak ki pár évvel ezelőtt [5]. Ezt a módszert fejlesztettük tovább, alakítottuk át, hogy diluált hálók és skálainvariáns hálók esetében is működjön. A módszer alapötlete az, hogy mikor a rendszerben minden kötés negatív akkor biztosan tudunk találni egy tökéletes frusztrációmentes állapotot. A legkézenfekvőbb ilyen megoldás az, hogy ha minden csúcspont külön

klasztert alkot, majd egyenként változtatva pozitívrá a kötéseket, minden lépésnél viszonylag egyszerű szabályokat alkalmazva megpróbáljuk közel tartani a rendszert ehhez az optimális állapothoz. Ha az egész folyamatot (vagyis a pozitív kötések sűrűségének változtatását 0-tól 1-ig) sokszor végigjárjuk, és a folyamat végén minden  $q$  értéknél külön átlagot számolunk, az energiák és rendparaméter átlaga egy jó megközelítést fog adni az optimális állapot energiájára és rendparaméterére.

A módszer főbb lépései:

- kezdetben minden kötést negatívra állítunk és azt feltételezzük, hogy mindenki külön klaszterben van – ez itt mindig egy optimális állapot
- minden lépésben véletlenszerűen kiválasztunk egy kötést és pozitívrá változtatjuk. Ennek megfelelően növeljük a  $q$  értéket is, amely a pozitív kötések sűrűségét jelöli.
- a kiválasztott kötés két csúcspontjához tartozó klasztert megpróbáljuk egyesíteni; ha energetikailag megéri, hogy a két klaszter átkerüljön egy közös állapotba akkor végrehajtjuk a műveletet
- ha a két klaszter egyesült, akkor ellenőrzést hajtunk végre az új klaszteren belül: ha kerül olyan csúcspont amelyiknek mégsem éri meg ehhez az új nagyobb klaszterhez tartozni (pl. túl sok „ellensége” került be hirtelen a csoportba) akkor azt visszatesszük eredeti állapotába
- kiszámoljuk és elmentjük az adott  $q$ -hoz tartozó energia és rendparaméter értéket, hogy a szimuláció végén átlagolni tudjunk
- a fenti lépéseket addig ismétljük amíg minden kötés pozitív nem lesz
- az egész folyamatot többször, és több hálóra is megismétljük, és végül minden  $q$  értékénél kiszámoljuk a rendparaméter és az energia átlagát

Látható, hogy minden lépésben, miután egy kötést pozitívrá változtatunk megvizsgáljuk a rendszert, hogy ennek a változásnak a következtében melyik csúcspot kellene átrakni egy másik klaszterbe, hogy a rendszer energiáját a minimális közelében tudjuk tartani. Ez a lépés az elsőnek kiválasztott kötések esetében a legegyszerűbb, mert akkor csak a két csúcspot viszonyát kell vizsgálni, de később, amikor az a kötés már két, esetleg több csúcspotot tartalmazó klasztert köt össze, akkor a teljes klaszterek viszonyát kell vizsgálni. Még bevezettünk egy ellenőrző lépést arra az esetre ha a két klaszter egyesül.

Az új klaszteren belül mindenképp lesznek frusztrációk, de ha olyan egyedet találunk amelynek az egyesítés után több „ellensége” van az új klaszterben mint „barátja” (vagyis energetikailag nagyon rossz neki az új klaszterhez tartozni) akkor azt visszatesszük eredeti állapotába.

Minden háló esetében a szimulációt többször elvégeztük és a végén minden  $q$  értéknél az összes háló eredményeit átlagoltuk. A szimulációkat elvégeztük 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 75, 100, 150, 200, 300, 400 és 500 csúcspontot tartalmazó hálókra a diluált hálók esetében és 20, 25, 50, 75, 100, 125 és 150 csúcspontot tartalmazó hálókra skálainvariáns hálók esetében. Minden egyes hálóméretre 100-szor generáltunk új hálót egy szimuláción belül és minden egyes generált hálóra a szimulációt 100-szor végeztük el.

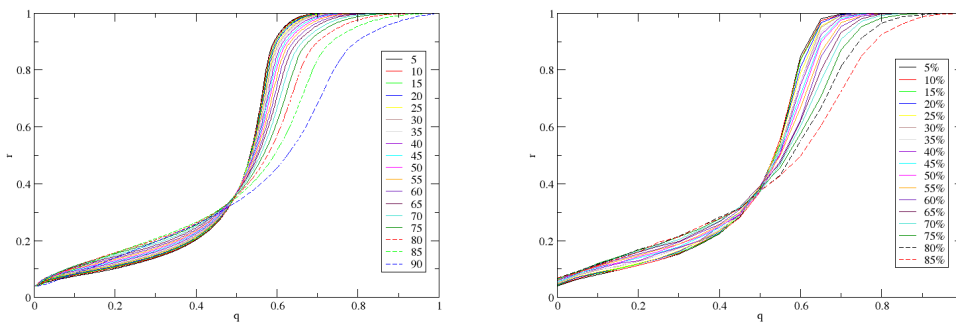
## 5. Eredmények

Az előbbi fejezetekben bemutatott módszereket alkalmazva érdekes eredményeket kaptunk. A globálisan csatolt hálóknál észlelt fázisátalakulás továbbra is megmarad, ellenben a fázisátalakulás pontja, a  $q$  kritikus értéke változik meg. A diluált hálózatoknál és a skálafüggetlen hálózatoknál is azt észleltük, hogy minél kisebb a kötések sűrűsége annál jobban eltolódik a fázisátalakulás helye. Próbáltunk választ adni arra, hogy pontosan mitől függ ez az eltolódás. Az eredményeink azt mutatják, hogy a fázisátalakulás helye az átlagos fokszámtól függ (vagyis az egy csomóra eső átlagos kötőszámtól:  $k=K/N$ ). Ez külön-külön mindkét típusú hálózatnál teljesül, ellenben összehasonlítva a különböző típusú de azonos átlagos fokszámmal rendelkező hálókat mégis eltérést látunk. Ez arra utal, hogy a hálózat struktúrájának is fontos szerepe van a fázisátalakulás tulajdonságai szempontjából.

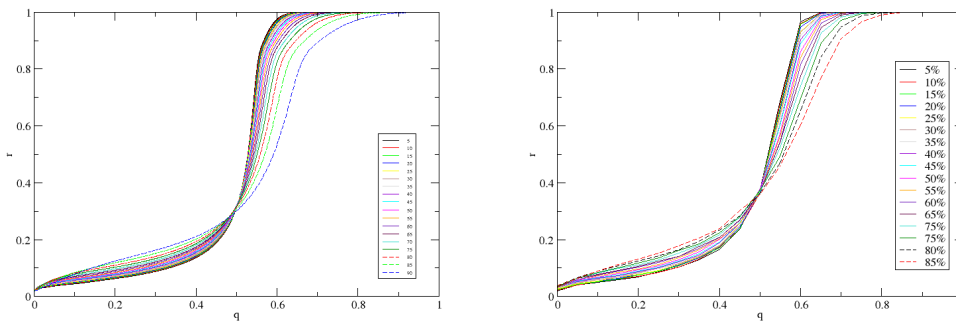
### 5.1 Diluált hálózatok

A 6., 7., 8., 9., 10, 11. ábrákon a diluált hálózatokra kapott eredmények láthatók. A következőkben minden ábrán a bal oldalon a sztochasztikus renormalizációs módszer, a

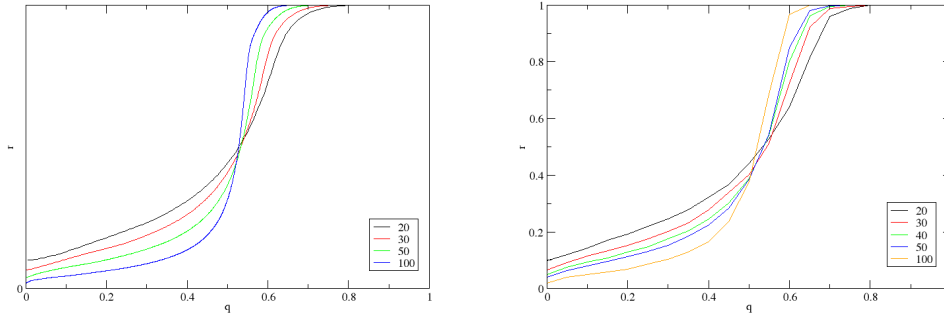
jobb oldalon pedig a szimulált hűtés által adott eredményeket ábrázoltuk. Látható, hogy a két módszer eredményei jó egyezést mutatnak. A 6. illetve 7. ábrán azonos méretű ( $N=50$  és  $N=100$ ) de különböző sűrűségű hálózatokra ábrázoltuk a rendparamétert, vagyis a legnagyobb klaszter relatív méretét ( $r$ ), a pozitív kötések sűrűségének ( $q$ ) függvényében. Az ábrán a  $p_{ki}$  értékek is fel vannak tüntetve %-ban. Látható, hogy minél több kötés hiányzik a hálóból, vagyis minél kisebb a kötések sűrűsége, a görbék annál inkább eltolódnak, és az átmeneti pont (a görbe legmeredekebb pontja) nagyobb  $q$  értékek felé tolódik



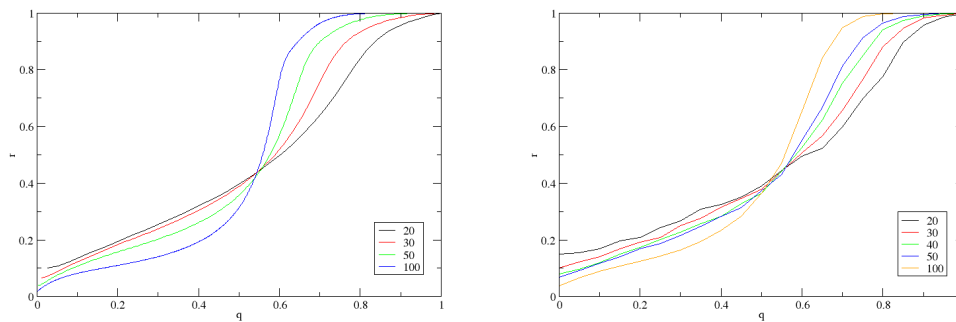
**6. ábra.** A rendparaméter a pozitív kötések arányának a függvényében,  $N=50$  csomóból álló hálóknál különböző  $p_{ki}$  paraméterekkel. Bal oldalon a sztochasztikus renormalizációs módszer, jobb oldalon a szimulált hűtés által adott eredmények láthatóak.



**7. ábra.** A rendparaméter a pozitív kötések arányának a függvényében,  $N=100$  csomóból álló hálóknál különböző  $p_{ki}$  paraméterekkel. Bal oldalon a sztochasztikus renormalizációs módszer, jobb oldalon a szimulált hűtés által adott eredmények láthatóak.



**8. ábra.** A rendparaméter a pozitív kötések arányának a függvényében,  $p_{ki}=5\%$  paraméter értékkel, különböző hálóméretek esetén. Bal oldalon a sztochasztikus renormalizációs módszer, jobb oldalon a szimulált hűtés által adott eredmények láthatóak.

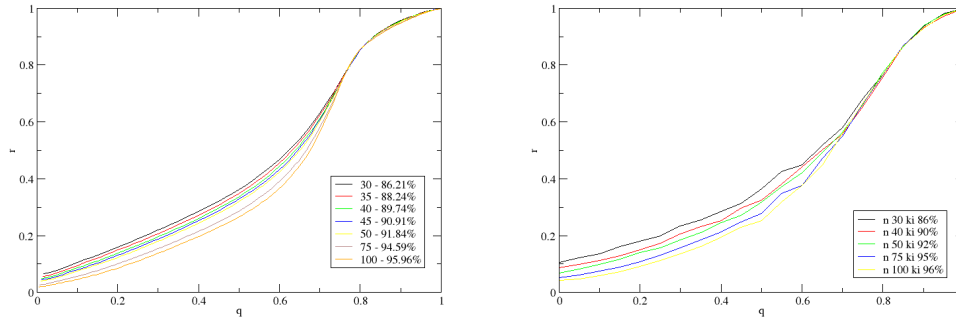


**9. ábra.** A rendparaméter a pozitív kötések arányának a függvényében,  $p_{ki}=80\%$  paraméter értékkel, különböző hálóméretek esetén. Bal oldalon a sztochasztikus renormalizációs módszer, jobb oldalon a szimulált hűtés által adott eredmények láthatóak.

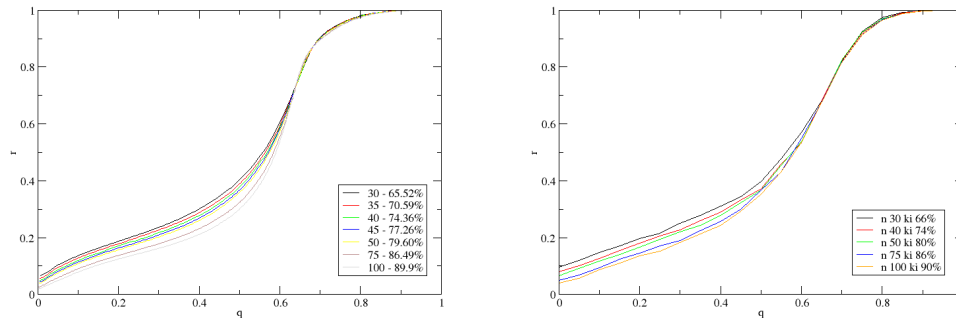
A 8. és 9. ábrán a megfordított jelenséget ábrázoltuk, amikor a  $p_{ki}$  paraméter állandó és a rendszer mérete változik. Az 8. ábrán  $p_{ki}=0,05$ , míg a 9. ábrán  $p_{ki}=0,80$ . Ismét, azt láthatjuk, hogy az átmeneti pontok (a görbék legmeredekebb pontjai) eltolódnak, most minél kisebb a rendszer, annál nagyobb lesz a  $q$  kritikus értéke. Tehát a fázisátalakulás helye nem konkrétan a létező kötések arányától függ ( $1-p_{ki}$ ), ellenben ez a viselkedés azt sejteti, hogy az átlagos, egy csomóra jutó kötésszámnak lehet szerepe, hiszen ugyanaz a  $p_{ki}$  kisebb rendszerekben nagyobb eltolódást okoz.

Ezt a sejtést próbáltuk ellenőrizni. Lerögzítve az átlagos fokszámot ( $k=K/N$ ), minden különböző méretű rácsnál kiszámítható, hogy a kötéseknek hány százalékát kell kivenni ( $p_{ki}$ ):

$$K = \frac{N \cdot (N - 1)}{2} \cdot (1 - p_{ki}) \Rightarrow p_{ki} = 1 - \frac{2 \cdot k}{N - 1}$$



**10. ábra.** A rendparaméter a pozitív kötések arányának a függvényében, ahol a  $k=2$ , különböző hálóméretek esetén. Bal oldalon a sztochasztikus renormalizációs módszer, jobb oldalon a szimulált hűtés által adott eredmények láthatóak.



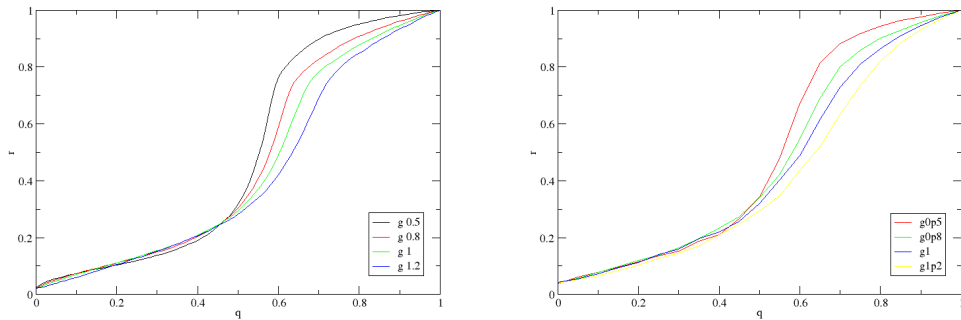
**11. ábra.** A rendparaméter a pozitív kötések arányának a függvényében, ahol a  $k=5$ , különböző hálóméretek esetén. Bal oldalon a sztochasztikus renormalizációs módszer, jobb oldalon a szimulált hűtés által adott eredmények láthatóak.

A 10. és 11. ábrán látható grafikonok olyan rendszerek esetében készültek, amelyekben az átlagos fokszám  $k=K/N$  állandó, azaz az egy csúcsra eső kötésszám állandó. A 10. ábra esetében az átlagos fokszám  $k=2$ , míg a második esetben  $k=5$ . Nagyon jól megfigyelhető, hogy a rendparaméter-görbék inflexiós pontja ugyanott található és utána a görbék jó

közelítéssel egybe esnek. Minél kisebb a  $k$  értéke a fázisátalakulás annál jobban el van tolódvá. Ez azt mutatja, hogy a fázisátalakulás helye valóban ettől a paramétertől, az átlagos fokszámtól függ.

## 5.2 Skálainvariáns hálózatok

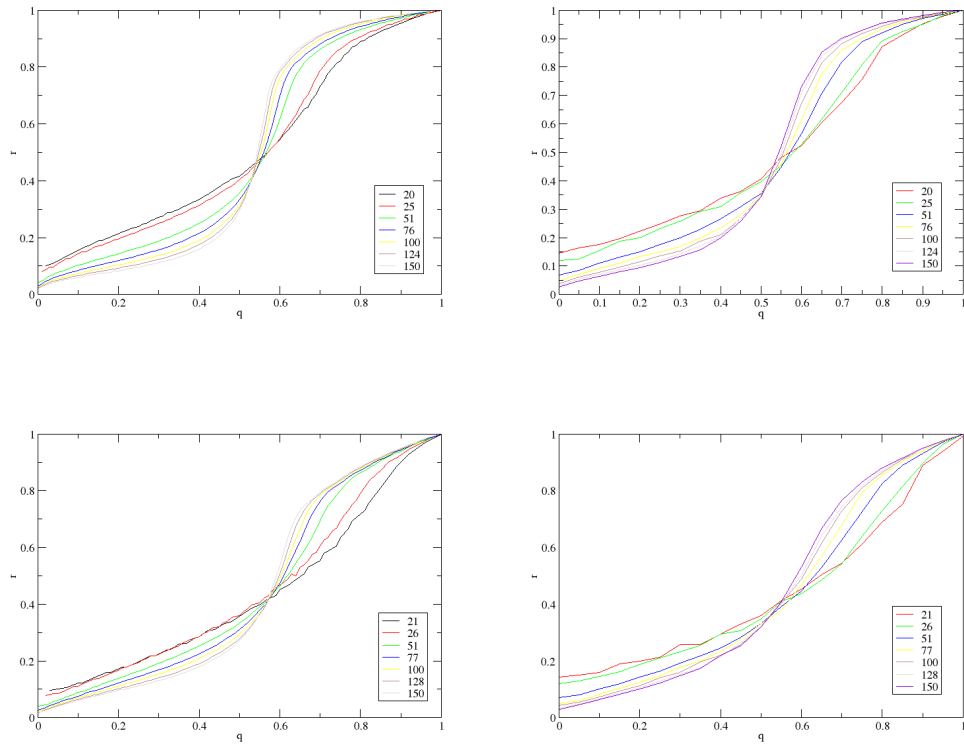
Skálainvariáns hálózatok esetén nagyon hasonló eredményeket kaptunk. Itt talán még kihangsúlyozottabb a fázisátalakulás eltolódása, mivel a skálainvariáns hálók sűrűsége általában elég kicsi.



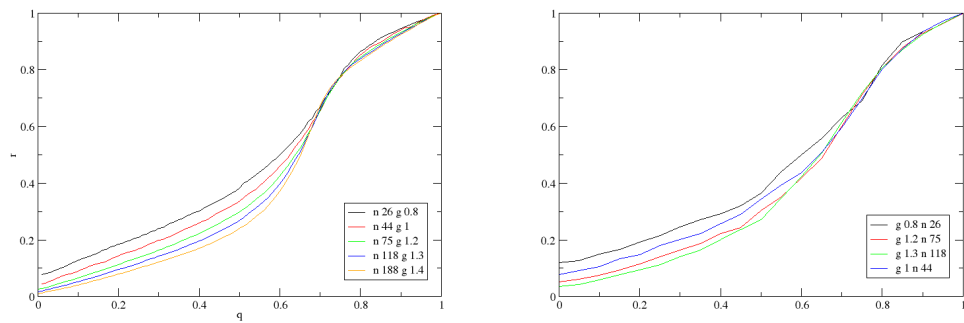
**12. ábra.** A rendparaméter a pozitív kötések arányának a függvényében,  $N=100$  különböző  $\gamma$  paraméterek esetén. Bal oldalon a sztochasztikus renormalizációs módszer, jobb oldalon a szimulált hűtés által adott eredmények láthatóak.

A 12. ábrán  $N=100$ -as méretű hálók rendparaméterügörbéi láthatók, különböző  $\gamma$  paraméterek esetében. A konfigurációs modellt használva a  $\gamma$  paraméter az fokszámeloszlást jellemző hatványfüggvény kitevője. Minél nagyobb ez a paraméter, annál meredekebb az eloszlás, ezért azonos méretű hálókból annál kevesebb kötés van. Itt is azt észleljük, hogy kisebb kötessűrűség, vagyis nagyobb  $\gamma$  esetén, jobban eltolódnak a görbék.

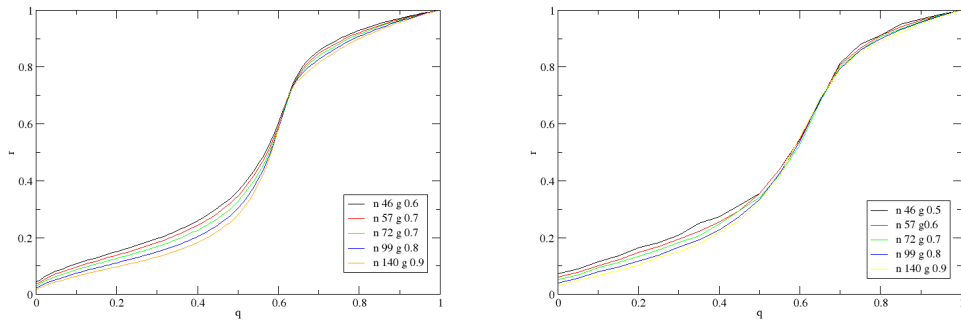




**13. ábra.** A rendparaméter a pozitív kötések arányának a függvényében,  $\gamma=0,5$  (felső két grafikon), illetve  $\gamma=1$  (alsó két grafikon) esetén, különböző méretű hálókra. Bal oldalon a sztochasztikus renormalizációs módszer, jobb oldalon a szimulált hűtés által adott eredmények láthatóak.



**14. ábra.** A rendparaméter a pozitív kötések arányának a függvényében, ahol a  $k=2$ , különböző hálóméretek esetén. Bal oldalon a sztochasztikus renormalizációs módszer, jobb oldalon a szimulált hűtés által adott eredmények láthatóak.



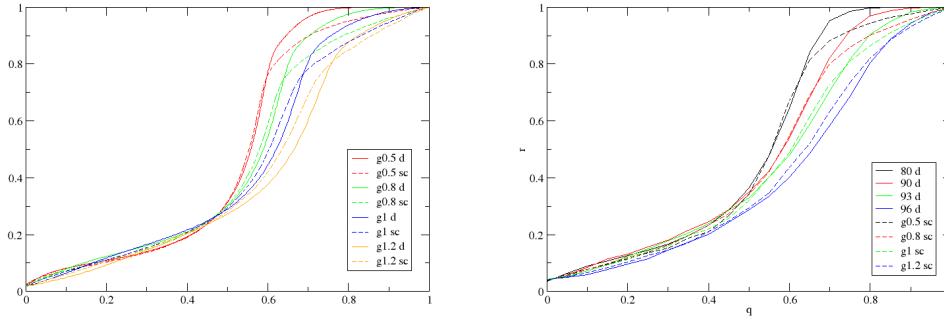
**15. ábra.** A rendparaméter a pozitív kötések arányának a függvényében, ahol a  $k=5$ , különböző hálóméretetek esetén. Bal oldalon a sztochasztikus renormalizációs módszer, jobb oldalon a szimulált hűtés által adott eredmények láthatóak.

A 13. ábrán állandó  $\gamma$  esetén ábrázoltunk különböző méretű rendszereket. Hasonlóan a diluált hálókhoz itt is, állandó gamma esetén a kisebb méretű hálók mutatnak nagyobb eltolódást. A viselkedés nagyon hasonló, ezért itt is leellenőriztük, hogy ha az átlagos fokszámot rögzítjük le, akkor mi történik. Itt is  $k=K/N=2$  illetve  $k=5$  értékekre ábrázoltuk az eredményeket a 14. és 15. ábrákon. A rögzített  $k$  érték előállításához szükséges  $\alpha$  és  $\gamma$  paramétereket nem olyan könnyű kiszámolni, mint a diluált hálók esetén. Mi több különböző  $\gamma$  értéknél nagyon sok  $\alpha$  értékre lefuttatott a hálógeneráló módszert, egy táblázatot készítve. Ebből kikereshető a megfelelő átlagos fokszámot generáló paraméterek értéke. Az ábrákból látható, hogy sejtésünk ismét beigazolódott: állandó  $k$  esetén a különböző hálók görbéi az inflexiós pontnál találkoznak és utána nagyon jó megközelítéssel egybeesnek.

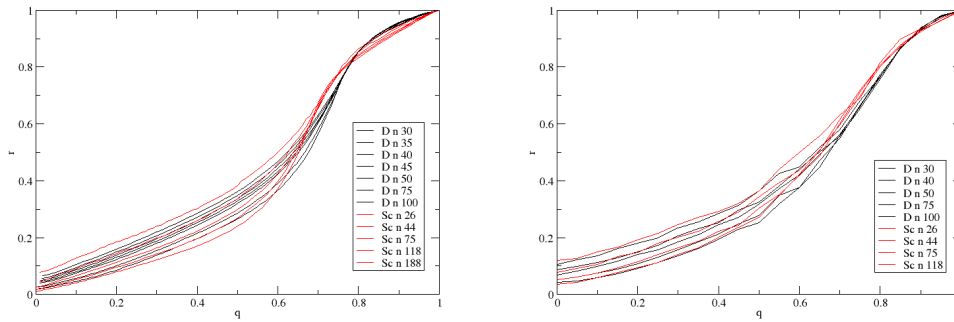
### 5.3 Összehasonlítás

Eredményeink azt mutatják, hogy úgy a diluált, mint a skálainvariáns hálók esetében, a fázisátalakulás helye az átlagos fokszámtól függ. Marad a kérdés, hogy a hálózatok topológiája változtat-e a rendparaméter-görbe alakján, esetleg a fázisátalakulás helyén. A 16. ábrán a 12. ábrán látható  $N=100$ -as méretű skálainvariáns hálókat ábrázoltuk, összehasonlítva őket azonos átlagos fokszámmal rendelkező diluált hálókval. Mindegyik

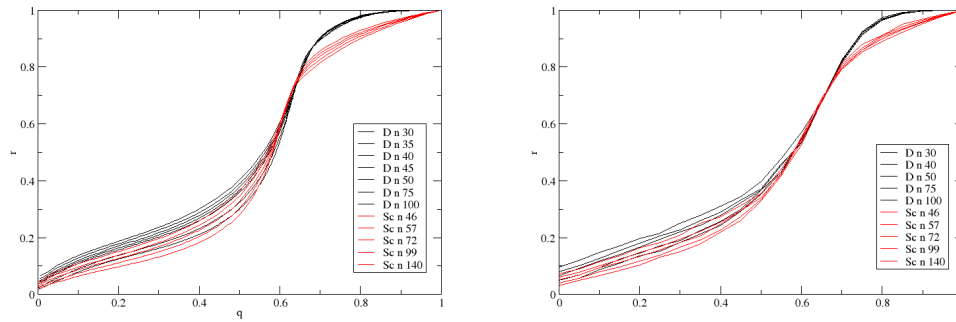
$\gamma$  esetén kiszámoltuk a háló átlagos fokszámát és ennek megfelelően generáltuk a diluált hálózatot. Az egymásnak megfelelő hálók görbéit azonos színnel ábrázoltuk, folytonos vonallal a diluált, szaggatott vonallal a skálafüggetlen hálók görbéi láthatók.



**16. ábra.** A rendparaméter a pozitív kötések arányának a függvényében,  $N=100$ , azonos átlagos fokszámmal rendelkező diluált illetve skálainvariáns hálók. Bal oldalon a sztochasztikus renormalizációs módszer, jobb oldalon a szimulált hűtés által adott eredmények láthatóak.



**17. ábra.** A rendparaméter a pozitív kötések arányának a függvényében,  $k=2$ , különböző méretű hálók esetében. Bal oldalon a sztochasztikus renormalizációs módszer, jobb oldalon a szimulált hűtés által adott eredmények láthatóak.



**18. ábra.** A rendparaméter a pozitív kötések arányának a függvényében,  $k=5$ , különböző méretű hálóknak esetében. Bal oldalon a sztochasztikus renormalizációs módszer, jobb oldalon a szimulált hűtés által adott eredmények láthatóak.

A 17. és 18. ábrán a  $k=2$  és  $k=5$  esetében hasonlítottuk össze a diluált és skálafüggetlen hálókat. Fekete színnel a diluált, míg piros színnel a skálafüggetlen hálókat ábrázoltuk. Látható, hogy annak ellenére, hogy külön-külön mindkét típusú hálónál egybeesik a görbék második szakasza, a különböző típusú hálóknak görbéi nem fedik teljesen egymást. A skálafüggetlen hálóknak rendparaméter-görbéi lassabban közelednek az 1-hez, nehezebben érik el az egyetlen koalícióból álló állapotot. Ezekből az eredményekből nagyon jól látható, hogy a háló struktúrájának, topológiájának is fontos szerepe van.

## 6. Következtetések

Véletlenszerűen diluált és skálafüggetlen hálózatok optimális klasztereződését vizsgáltuk, egy egyszerű Potts-üveghez hasonló modellt használva. A szimulált hűtés és a sztochasztikus renormalizációs módszer által adott eredmények jó egyezést mutatnak. A globálisan csatolt hálókhöz hasonlóan itt is észlelhető a fázisátalakulás, vagyis a legnagyobb klaszter relatív mérete nullához tart, mikor a pozitív kötések aránya kisebb mint egy küszöbérték, és egyhez mikor a pozitív kötések aránya nagyobb a kritikus értéknél. Érdekes különbség azonban, hogy ezekben a hálózatokban a fázisátalakulás helye eltolódik, minél kisebb a kötések átlagos fokszáma annál nagyobb a kritikus érték.

A diluált hálózatoknál és a skálafüggetlen hálózatoknál is azt észleltük, hogy különböző méretű de ugyanakkora átlagos fokszámmal rendelkező hálózatok rendparaméter görbéi pontosan az inflexiós pontnál találkoznak és a kritikus értéknél nagyobb  $q$  értékekre jó megközelítéssel egybeesnek. A különböző struktúrájú de azonos átlagos fokszámmal rendelkező hálózat összehasonlítva ellenben különbség látható: a skálafüggetlen hálózatok rendparamétere lassabban nő, csak nagyobb  $q$  értékeknél jut el az egyetlen koalícióból álló állapotba.

## Referenciák

- [1] J. D. Bryngelson, P. G. Wolynes, *PNAS*, **84** (21), 7524 (1987)
- [2] K.H. Fischer and J.A. Hertz, *Spin Glasses*, Cambridge University Press (1991)
- [3] D. L. Applegate, R. E. Bixby, V. Chvátal and W. J. Cook, *The Traveling Salesman Problem: A Computational Study*. Princeton University Press (2006).
- [4] Michael R. Garey and David S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W.H. Freeman (1979)
- [5] Z. Nédá, V. Florian, M. Ravasz, A. Libál, G. Györgyi, *Physica A* **362** (2), 357 (2006).
- [6] K. Binder and J. D. Reger, *Adv. Phys.* **41**, 547 (1992)
- [7] T.R. Kirkpatrick and P.G. Wolynes, *Phys. Rev. B* **36**, 8552 (1987)
- [8] R. Axelrod and S. Bennett, *British J. Political Sci.* **23**, 211 (1993)
- [9] S. Galam, *Physica A* **230**, 174 (1996)
- [10] R. Florian and S. Galam, *Eur. Phys. J. B* **16**, 189 (2000)
- [11] A.-L. Barabási, R. Albert, *Science* **286**, 509 (1999)
- [12] W. Aiello, F. Chung, L. Lu, *Proceedings of the 32nd Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, Association of Computing Machinery, New York, , p. 171 (2000)
- [13] B.O. Peters, B. Dunrveg, K. Binder, M.D. De Meo and K. Wollmayr, *J. Phys. A* **29**, 3503 (1996)