Sztochasztikus folyamatok az ökológiában

Populációdinamikák sztochasztikus modellezése

Pályázó
Reiz Reimond

Harmadéves hallgató
Babes-Bolyai Tudományegyetem
Kolozsvár
Matematika es Informatika Kar
Informatika Szak

Irányitó tanár
dr. Soós Anna

docens
Babes-Bolyai Tudományegyetem
Kolozsvár
Matematika és Informatika Kar
Numerikus Analízis és Statisztika Tanszék

A célok ismertetése

Azon nézetünkkel összhangban, miszerint az ember képes lehet a szükebb, belátható világot megismerni, és érdekeltségi körében a meglévő ismereteknek megfelelően, valamint az érvényben lévő megállapodásokat betarva azon életterén, amely fölött elvitathatatlan joggal rendelkezik, pozitiv irányu és közösnek mondható céljainak elérésére irányuló hatékony változtatásokat kieszközölni, kivánjuk kutatni jelen esetben az ökológia körében értelmezett folyamatokat.

Amennyiben sikerrel jár a treméseti ökoszisztémákban megfigyelhető jelenségek hatékony modellezése valamint hasznositható előrejelzések elkészitése, akkor ezáltal közvetlen módon, szemléltethetjük a fent megfogalmazottak müködési képességét.

Célunk az emlitett természeti ökoszisztémákban a populáció-dinamikák modellezese, azaz a természeti populációkók, vagyis élőlény-eggyüttesek egyedszámának időbeli változásainak matemateikai leirása.

Célunk szerint törekszünk az egy ökoszisztémában eggyütt létező különböző fajok egymásra való hatását, illetve kölcsönhatását tekinteni, és az illető egyedszámdinamikákat ugyanabba a modellbe integrálni egy valósághü eredmény reményében. Azonban, számitási erőforrásaink erős korlátoltsága miatt, meg kell elégednünk olyan modellekkel amelyek csupán néhány fajt képesek tekinteni, noha tujuk, hogy ezek nem függetlenek egymástól. A kapott modellek jelentős leegyszerüsitések és elvonatkoztatások eredményei, amelyek a valósággal való hasonlóságuk tekintetében hasznosak. Igy eltekintünk olyan, egy élőlényeggyüttesre nézve súlyos jelentőséggel biró tényezőktől, mint például az időjárás szeszélyeitől, az azonos fajhoz tartozó egyedek különbözőségeitől, az élettér inhomogén természetétől, más ökoszisztémákból származó hatásoktól, természeti katasztrófáktól, vagy az egyedek természetében bekövetkező minőségi változásoktól, mint például a mutációktól és az egyedi avagy a csoportos tanulás okozta módosult viselkedés hatásaitól.

Ezeket a tényezőket lehetőség szerint a megfelelő valószinüségi változókkal képviseltetjük modelljeinkben, igy azoknak sztochasztikus perspektivát kölcsönzünk.

Az egyedszámok változásainak leirásában vagyunk érdekeltek, és azokat valószinüségi változóknak tekintjük, ilyenkor ezalatt természetesen a valószinüség adekvátabb, frekvencia, azaz relativ gyakoriság szerinti értelmezését használjuk, amire empirikus úton következtetünk.

Modelljeinket sztochasztikus differencialegyenletek formájában írjuk le. A kapott sztochasztikus dinamikai rendszereket ezután kvalitativ vizsgálatoknak vetjük alá. Vizsgáljuk ilyen értelemben az illető dinamikai rendszer egyensulyi ponjainak stochasztikus stabilitását.

A populáció-dinamikai folyamatok modellezésének alternativái

- ## A determinisztikus Volterra-Lotka modell ismertetése

Feltételezi, hogy a populáció folyamatosan táplálkozik és szaporodik, és a hatás azonnali. A legegyszerubb megközelitésben bizonyos faj egyedszámának változása egy ökoszisztémában exponenciális ütemü, az

$$\frac{dX(t)}{dt} = r * X(t)$$

detreminisztikus differenciálegyenletnek megfelelően. Ennek értelmében az adott fajra nézve, az adott ökoszisztémában létezik egy r növekedési eggyütthható, egy állandó, amely az egy egyedre számitott reprodukció intenzitásának numerikus jellemzője.
Az előző megközelités korlátlan egyedszámnővekedést sem zár ki, amit valósabb mederbe helyezhetünk, amennyiben feltételezzükk, az illető ökoszisztémára nézve egy *K* állandó eltartóképesség létezését. Ennek megfelelően a fenti egyenlet igy alkul

$$\frac{dX(t)}{dt} = r * X(t) * (1 - \frac{X(t)}{K})$$

A ragadozó-zsákmány, vagy versengő tipusu modelleket Volterra munkái vezették be 1926-tól.
Legyen *t* időpillanatban *X(t)* a ragadozó, *Y(t)* egyedszáma. Ekkor *N* számu faj esetén a következő differenciálegyenlet-rendszer adódik

$$\frac{dX_t^{(i)}}{dt} = r^{(i)} * X_t^{(i)} * \frac{K^{(i)} - \sum_{j=1}^{N} a(i,j) * X_t^{(j)}}{K^{(i)}}$$

$i = \overline{1,N}$ esetén, ahol $X_t^{(i)}$ az *i* –ik faj egyedszáma a *t* –ik időpillanatban, $K^{(i)}$ az ökoszisztémának az *i* –ik fajra vonatkozó eltartóképessége, *a(i,j)* az *j* –ik fajnak az *i* –ik fajra vonatkozó hatását jellemzi.

Az 1948-as Leslie-féle megközelitésben a ragadozó egyedsürüsége a ragadozó és a zsákmány arányától függ, ellenben a Volterra által adott egyenlettel, amely esetben ez cask a zsákmány egyedsürüségének függvénye.

A következő ábra ragadozó – zsákmány visszonyban lévő két faj egyedszámának időbeni alakulását szemlélteti. Ebben az esetben a determinisztikus Volterra – Lotka modellt használtuk két faj esetén. A ragadozó-zsákmány arány ebben a az esetben 45-80. Fontos megjegyezni, hogy ezen modell szerinti megközelitésben – ami amugy konformitásban a valósággal ebben a tekintetben – a ragadozónak valamint a zsákmánynak megfelelő fajok egyedszámának aránya fontos jelzőszám ugyan, de önmagában nem meghatározó, vagyis nem teszi egyértelmüvé a vizsgált dinamikai rendszer jövőbeli állapotait. Ehez szükség van az emlitett két faj egyedszámának pontos értékeire. Más megfogalmazással, ugyanazon arányok ű, de különböző kezdeti egyedszámok esetén a mnegfelelő dinamikai rendszerek pályái nem izomorfak.

Esetünkben egy bizonyos mértékü nem stacionárius periodicitás figyelhető meg a szolgáltatott eredményekből.

Különösen érdekes és nem különben hasznos esetünkben az adott dinamikai rendszer stabilitását vizsgálni.

A leszimulált esetben a következő kétdimenzós esetet tekintettük

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta x y$$

$$\frac{dy}{dt} = \delta x y - \gamma y$$

ahol x, jelöli a zsákmány egyedszámát, y pedig a ragadozóét. Az illető élőlényeggyüttesek méretének idő függvényében való változását ilyen módon sikerült dinamikai rendszer formályában megfogalmazni, igy az egyedszamámok változása az időtől csupán az aktuális egyedszámokon kerestül függ, vagyis nem attól, hogy mennyi idő telt el a attól a pilllanattól számitva, amikor a kezdeti eltételt érvénybe helyeztük.

Két egyensúlyi pontot tudunk beazonositani a fenti dinamikai rendzerrre vonatkozóan -

$$\{y = 0, x = 0\}$$

$$\left\{y = \frac{\alpha}{\beta}, x = \frac{\gamma}{\delta}\right\},$$

ahol az első állapot az illető fajok kihalását jelenti, - egy triviális egyensúlyi piont. Ezek a pontok olyanok, hogy a nekik megfelelő állapotokban a fenti idő szerinti deriváltak zérusértéket vesznek fel, ezzel garantálva, hogy az idő folyamán a jövőben többé nem változik a vizsgált mennyiségek értéke.

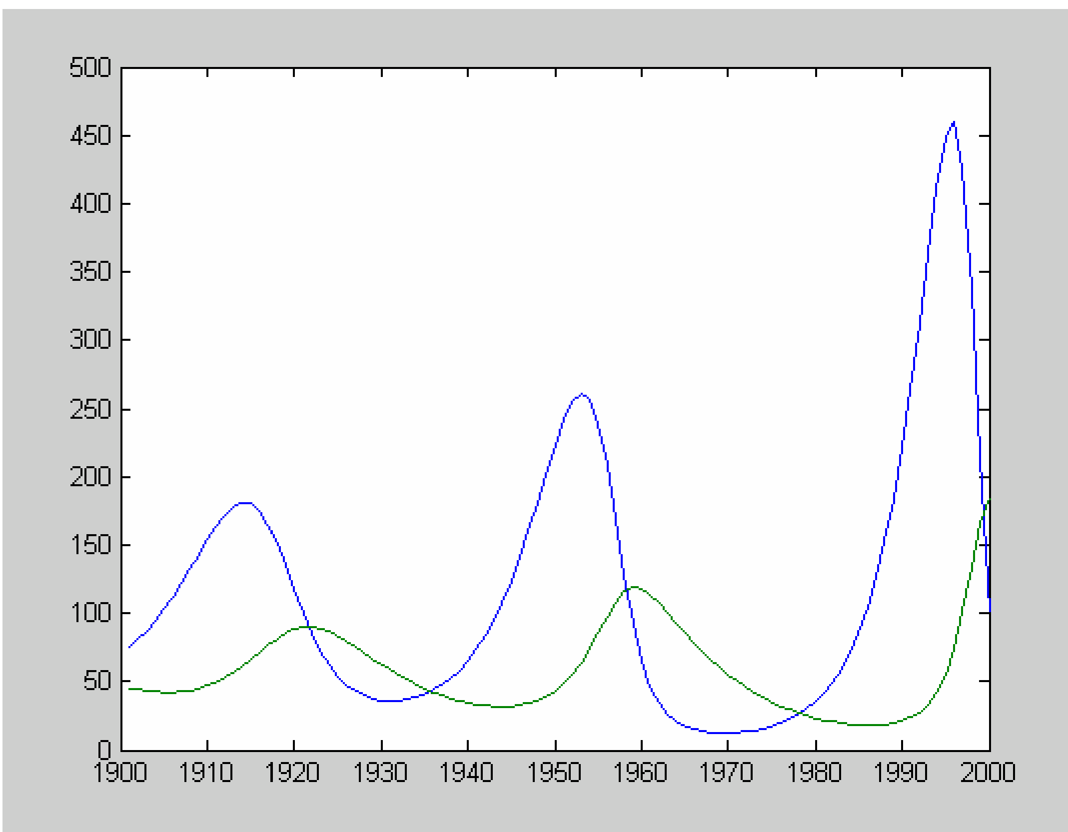
Megjegyzendő, hogy az ökológiai folyamatok – dinamikai rendszerek esetén inkább a peridicitás tekintetében beálló stabilitás vizsgálandó, mintsem a fentebb ismertetett. Periodicitás szintjén bekövetkező stabilitás alakul ki a természetben sikeres ökoszisztémák esetén. Itt a stabilitás hiánya előbb-utóbb valamely faj kihalását eredményezné. Fontos belátni, hogy a gyakorlatban nem fordul elő determinisztikus

értelemben az efajta stabilitás, hanem inkább sztochasztikus szinten. Lgalábbis ez az egyetlen rendelkezésünkre álló matematikai eszköz, aminek segitségével modellezhetjük a természetben megfigyelt folyamatokat.
Ennek megfelelően a következőkben ismertetjük a sztochasztikus stabilitásra vonatkozókat is.

Az egyensúlyi pontok stabilitását a linearizálás módszerével tanulmányozhatjuk. A fenti determinisztikus differenciálegyenlet-rendszerhez rendelt Jakobi mátrix

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & \delta x - \gamma \end{bmatrix}$$

A (0,0) pontban számitott sajátértékek pozitivak, igy ez a pont instabil. Ennek jelentése az, hogy nem várható egyik faj kihalása sem. Intuitive – ha a zsákmány szerepében lévő faj egyedszáma megcsappan, akkor a ragadozók száma is lecsökken ennek megfelelően, mig ezen modell szerint a ragadozók számának megfelelő visszaesésével a másik faj mérete megnő, akár korlátlan mértékben, exponenciális ütemben.



ragadozo (zöld) – zsakmany (kék)

- **A nemdeterminisztikus Volterra-Lotka modell ismertetése**

Sztochasztikus megközelitésben az egyedszámok valószinüségi változóknak tekintendők. A determinisztikus Volterra-Lotka modellben szereplő paraméterek pillanatnyi pontos értétéke tükröz bizonytalanságot. Ilyen megfontolásból indokolt az emlitett paraméterek és egy zaj, adott esetben a Gauss-féle fehér zaj összegét tekinteni az eredeti differenciálegyenlet-rendszerben az eddigi paraméterek helyett.

Legyen adott a két fajból álló ökoszisztéma dinamikáját leiró differenciálegyenlet-rendszer

$$\frac{dX_t}{dt} = a * X_t + b * X_t * Y_t$$

$$\frac{dY_t}{dt} = c * Y_t + d * X_t * Y_t$$

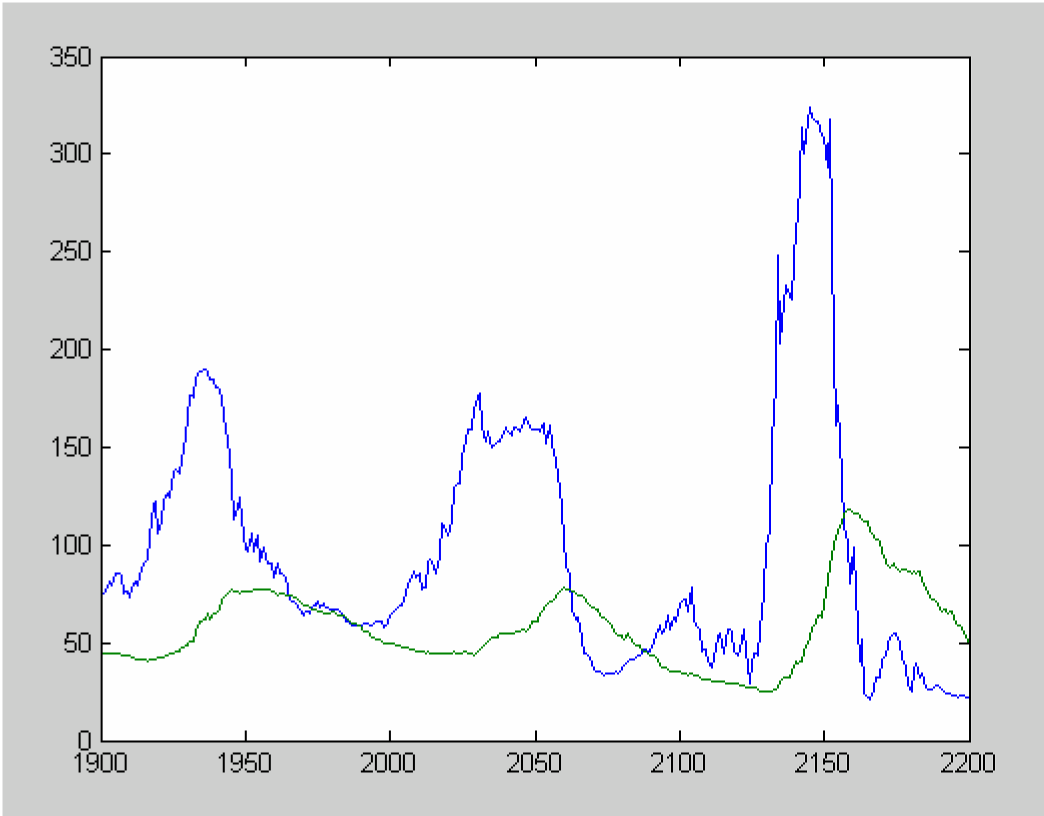
A paraméterekhez hozzáadva a fehér zajt az populációdinamikát leiró sztochasztikus differenciálegyenletürendszer a következőképpen alakul

$$dX_t = (a * X_t + b * X_t * Y_t) * dt + (a' * X_t + b' * X_t * Y_t) * dW_t$$
$$dY_t = (c * Y_t + d * X_t * Y_t) * dt + (c' * Y_t + d' * X_t * Y_t) * dW_t$$

Itt W_t jelentése a standard Wiener folyamat, dW_t eszerinti sztochasztikus differenciált jelent. A kapott sztochasztikus differenciálegyenlet-rendszer megoldását az Euler féle módszer segitségével közelitettük meg. Az Euler módszerre sztochasztikus esetben is bizonyitott a megoldáshoz való konvergencia, ebben a körben sztochasztikus konvergencia érvényes 1 valószinuséggel.

A következő ábra a sztochasztikus Volterra-Lotka modell esetén illusztrálja az illető sztochasztikus folyamat egy megvalósulását, Gauss-féle fehér zaj mellett.
Meg kell jegyeznünk, hogy sajnos bizonyos körülmények között az X valamint Y valószinüségi változók megvalósulásai negativ értékeket mutathatnak, ami valótlan eredményt jelent. Ez az esemény akkor következik be, amikor a dW_t sztochasztikus differenciál túl kicsi értéket vessz fel, ami fokozottan kis valószinüséggel ugyan, de korlátlan mértékben bekövetkezhet a normál eloszlásu valószinüségi változó természete miatt.

Ezen elkerülhetetlen probléma miatt kénytelenek vagyunk más megközelitésből szemlélni a sztochasztikus modellt. Az ökológiai folyamatok természete lehetővé teszi a születési-halálozási folyamatként való felfogást. Gondolunk itt az egyedszámok értékeinek diszkrét természetére, amit a folytonos modell nem volt képes figyelembe vennié valamint az egyedszámváltozásokat leirni tudó véletlen bolyongásnak megfelelő sztochasztikus folyamatokra. A választott modell a folytonos idejü születés-halálozási folyamat. Besorolását tekintve folytonos idejü Markov lánc megszámlálhatóan végtlen sok állapttal. A valószinüségi változók felvett értékei természetes számok.



ragadozo (zöld) – zsakmany (kék)
sztochastikus eset Gauss-féle fehér zajjal

Egyenként a születési valamint a halálozási folyamatok változó paraméterre, itt születési illetve halálozási valószinüségintenzitások.

A Volterra - Lotka modellt igy atértelmezhetjük és finomithatjuk, ugy, hogy születési illetve halálozási valószinüségintenzitásokat a determinisztikus modellben kifejezett dinamika elvét használjuk fel a továbbiakban is.

Jelöljük a születési és halálozási valószinüségintenzitásokat λ illetve μ.
Ekkor legyen

$$\lambda^{(i)}(t) = a^{(i)} * X_t^{(i)}$$

$$\mu^{(i)}(t) = b^{(i)} * X_t^{(i)} + \sum_{i=1}^{N} (c^{(i,i)} * X_t^{(j)} \otimes d^{(i,i)} * X_t^{(i)} * X_t^{j})$$

Ahol a bevezetet müvelet szekektiv különbséget jelent.
A paraméterek jelentését az alábbiak magyarázzák

a- az egy főre eső születési mutató
b- az egy főre eső halálozási mutató
c- a ragadozók egy főre eső fogyasztási szükségletét fejezi ki, az indezek szerint az i-k fajnak a j-ik faj egyedeire vonatkozóan
d- i-k fajnak egyedeinek a j-ik faj egyedeivel való találkozásának hatását muattja az előbbire vonatkozóan

N- jelentése az ökoszisztámában eggyütt élő fajok száma

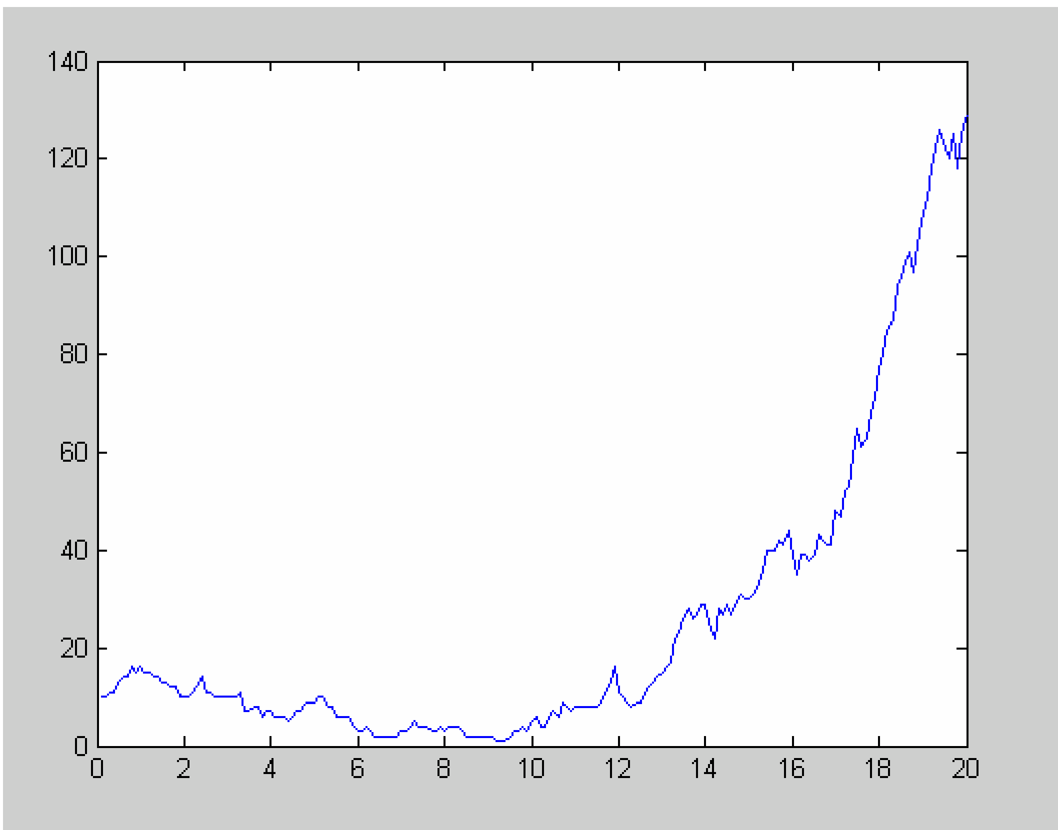
Továbbá K(i) jelenti az ökoszisztéma eltartóképességét az iüik fajra vonatkozóan

Az emlitett bevezetett uj muvelet megvalósitasa, különbséget képezünk, ha az eredmény pozitiv lenne, vagy 0-at, különben.

t- változik 0-tól vegtleneig

A folyamat szimulálása esetén kitétel, hogy amnnyiben az egyedszám elérte az eltartóképességet, akkor a születési valószinüségintenzitás 0- t kell eredményezzen.

Egy lehetséges megvalósulást mutat a születési illetve halálozási folyamatra vonatkozóan ábra

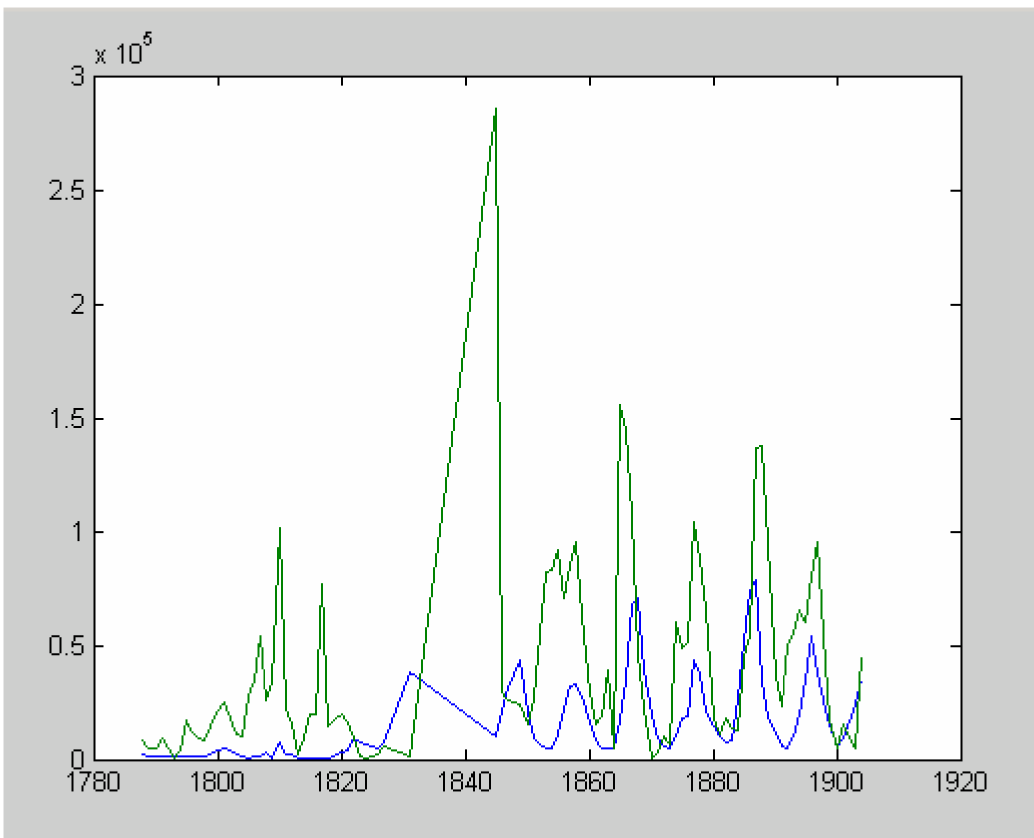


Analitikus formában a következő eloszlásokat tekintsük

$$dX(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda(t) * dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \lambda(t) * dt \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \mu(t) * dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \mu(t) * dt \end{pmatrix}$$

sztochasztikus differenciálegyenletet kapunk minden I értékre 1 és N között.

A kovetkező abra a Hudson öbölbeli canadai hiuz azaz lynx canadensis
Valamint Hudson öbölbeli nyul, azaz lepus americanus egyedszamanak valtozasat
mutatja



A szuletes halalozas leszuimulalva