

XIX. reál- és humántudományi Erdélyi Tudományos Diákköri Konferencia (ETDK)
Kolozsvár, 2017. május 18–21.

Kritikus önszerveződés vizsgálata

összegubancolódt anyagban

Szerző:

Kapusi Áron

Babeş–Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár, Fizika Kar, mérnöki fizika szak, alapképzés, IV.
év

Témavezetők:

dr. Járai-Szabó Ferenc egyetemi docens,

Babeş–Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár, Fizika Kar, Magyar Fizika Intézet

drd. Varga Levente egyetemi tanársegéd,

Babeş–Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár, Matematika és Informatika Kar, Magyar
Matematika és Informatika Intézet

Tartalomjegyzék

| | |
|---|----|
| Kivonat..... | 3 |
| 1. Bevezetés | 4 |
| 2. Kísérleti vizsgálat..... | 6 |
| 2.1 A vizsgált rendszer | 6 |
| 2.2 Megvalósítás..... | 7 |
| 2.3 Mérési eredmények | 9 |
| 3. Szimuláció..... | 12 |
| 3.1 Rugó-tömb típusú modellek..... | 13 |
| 3.1.1 Az elkészített modell megvalósítása..... | 14 |
| 3.1.2 Eredmények | 15 |
| 3.2 Modellezés hálózatok segítségével..... | 18 |
| 3.2.1 Az elkészített modell megvalósítása..... | 20 |
| 3.2.2 Eredmények | 23 |
| 3.2.3 A csomópontokban létrejövő szakadások fontossága..... | 25 |
| 4. Következtetés | 27 |
| 5. Irodalomjegyzék | 28 |

Kivonat

Az összegubancolódott, szálas szerkezetű anyagok érdekes fizikai tulajdonságokkal rendelkeznek. Sokat vizsgálták az ilyen anyagok összenyomásakor megfigyelhető jelenségeket. Mindemellett az is érdekes lehet, hogy mi történik, ha ilyen anyagból szálat húzunk ki. Ezt vizsgáltuk egy helyben összeállított kísérleti berendezéssel. Az elkészített eszköz egy mikrovezérlő által kontrollált, változtatható sebességű motorból, valamint egy laboratóriumi mérlegből áll. Ezek segítségével egy szálat húzunk ki dobozban elhelyezett gomolyagból állandó sebességgel. A doboz súlyának és a szálaban fellépő húzóerőnek az eredője időben változik a szálabancban történő megakadásainak függvényében. Ezt az időbeni változást nagy pontossággal tudjuk mérni a digitális mérleggel. A húzáskor létrejövő megakadások eloszlását meghatározva hatványfüggvény viselkedést tapasztaltunk, ami a rendszerben kialakuló kritikus önszerveződést jelzi. A kapott eredményeket hálózatmodell segítségével is magyarázzuk.

1. Bevezetés

Az összegubancolódott anyagok szálakból állnak. A szálaknak nagyon változatos elhelyezkedési módjai lehetnek, amelyek egy nagyon speciális és komplex mechanikai viselkedést mutatnak. A szálak lehetnek természetesek (pl. gyapjú, pamut) vagy mesterségesek (pl. szénszál, üvegszál vagy acélszál). Ezeket az anyagokat leggyakrabban különböző szigetelésekre, mechanikai erősítésekre vagy szűrésre használják. Figyelembe véve az összegubancolódott anyagok relatív kis sűrűségét és belső felépítését, hasonlóságot állapíthatunk meg a sejtes anyagokkal [1].

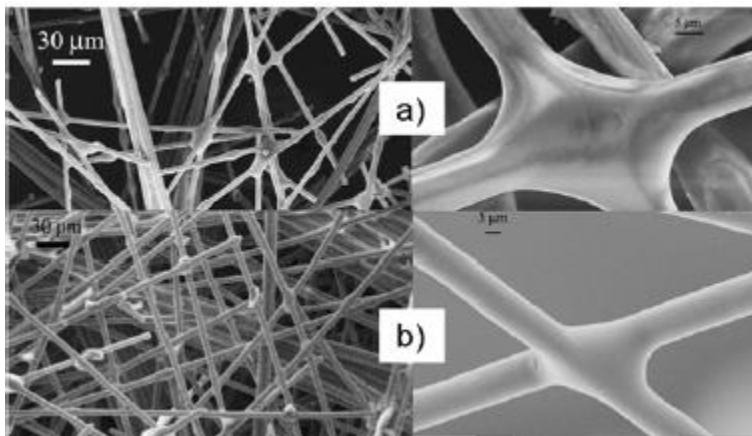
Az anyagok tulajdonságai nagyban függenek a felépítési paramétereiktől, mint például a szálak között található érintkezési pontok számától, a szálak irányítottságától vagy azok méretétől. Az érintkezési pontok lehetnek állandó vagy nem állandó kapcsolatok. Ezek természete nagyban meghatározza a gubancolódott anyagok tulajdonságát. Az anyag viselkedésében fellelhető komplexitás a szálak között fellépő érintkezési súrlódásnak tulajdonítható [1].

Az összegubancolódott anyag elkészítési folyamata és felhasználása egyszerű. A közelmúltban tanulmányozták, mint szendvicsszerkezetek alapanyagát is. Ugyanakkor egy alternatívát jelenthet ez a szerkezet habok (fém vagy polimer) helyettesítésére. Néhány fém esetén nehézkes a habok felhasználása a magas olvadási hőmérséklet miatt, ezért szál formában dolgozzák fel. Az előbbiekből kifolyólag sok tanulmányt készítettek ezekről az anyagokról, tesztelve azok mechanikai tulajdonságait (összenyomás, torzió, hajlítás), hő- és elektromos vezetőképességeit és csillapítási képességeit [1]. A szálak szerkezetű, összegubancolódott anyagok tulajdonságainak a meghatározására analitikus és numerikus modelleket fejlesztettek ki [1]. Az összenyomásra vonatkozóan egy egyszerű analitikus modell [1] azt mutatja, hogy a nyomás és a relatív sűrűség közti összefüggés hatványfüggvény. Az előbbi állítást alátámasztják a numerikus modellezések (végelem módszere), valamint a molekula dinamikai szimulációk. Az analitikus módszerekkel kapcsolatot teremtettek az érintkezési pontok száma és a relatív sűrűség között, valamint a szálirányok eloszlása és a nem állandó érintkezési pontok között. Ugyanakkor paraméterként kezelhetjük az érintkezési pontok között található átlagos távolságot és a két érintkezési pont között erő hatására létrejövő elhajlás mértékét. Ezekből következik, hogy az összegubancolódott anyagok tanulmányozása esetén a meghatározó tulajdonságokhoz és paraméterekhez a felépítés jellemzésével jutunk el.

Különböző összegubancolódott anyagokat vizsgáltak, amelyet az 1. ábra szemléltet. Üvegszál (1a ábra) és szénszál (1b ábra) esetén a szálak keresztveződése kör keresztmetszetű 5 és az átmérőjük 7 és 12 mikrométer. A rugalmassági Young modulusuk 73 és 240 Gpa, a hosszuk 40 mm [1].

Az eddig ismert és itt bemutatott, nagyon sok esetben hatványfüggvényekkel leírható viselkedések alapján úgy gondoljuk, hogy a szálakból kialakított gubanc jó példája a komplex viselkedést mutató rendszereknek. Éppen ezért a komplex rendszerek megértéséhez közelebb vihet egy ilyen rendszer tanulmányozása. Az általunk tanulmányozott szakirodalom nem foglalkozott viszont azokkal a komplex viselkedésformákkal, melyek akkor következnek be, ha egy szálát kihúzzunk a gubancból. Tanulmányunkban arra fogunk koncentrálni, hogy milyen jellegű eloszlásfüggvényt mutat egy adott szál megakadásainak nagysága, ha az összegubancolódott anyagból a szálát állandó sebességgel húzzuk ki.

A következő fejezetben az általunk vizsgált rendszert mutatjuk be, illetve az elvégzett kísérlet technikai részleteit és eredményeit ismertetjük. A harmadik fejezet a vizsgált jelenség számítógépes modellezésével és annak eredményeivel foglalkozik. A dolgozatot a következtetéseink és további vizsgálati lehetőségek ismertetésével zárjuk.



(1. ábra) Különböző összegubancolódott anyagok, a) üvegszál és b) szénszál. Forrás: [1]

2. Kísérleti vizsgálat

Ebben a fejezetben bemutatjuk az általunk vizsgált komplex rendszert, azaz a szálak szerkezetű gubancot, az elvégzett kísérlet technikai megvalósítását, illetve a kapott eredményeket.

2.1 A vizsgált rendszer

Az általunk vizsgált komplex rendszert ipari kenderszálakból alkotott gubanc képezi. A szálakat és a gubancot a 2. ábrán szemléltetjük. Az anyag kiválasztásánál azt vettük figyelembe, hogy a gubancot alkotó szálak elég erősek legyenek ahhoz, hogy elszakítás nélkül ki tudjuk húzni a gubancból. Ilyen értelemben például a vatta nem használható kísérletileg.



(2. ábra) Kenderszál és a belőle készült összegubancolódott anyag.

A vizsgált rendszerünk segítségével az összegubancolódott anyagoknak egy dinamikai tulajdonságát vizsgáljuk. Arra vagyunk kíváncsiak, hogy hogyan viselkedik az anyag, ha egy alkotó szálát állandó sebességgel húzzuk ki a gubancból.

Bárki kipróbálhatja, hogy egy gubancból történő száلكihúzás esetén azt érezzük, hogy az általunk húzott szál időnként megakad. Ezek a megakadások nem egyenletesek sem nagyságukat, sem előfordulásukat tekintve. Ez számos új kérdést vet fel, mint például azt, hogy

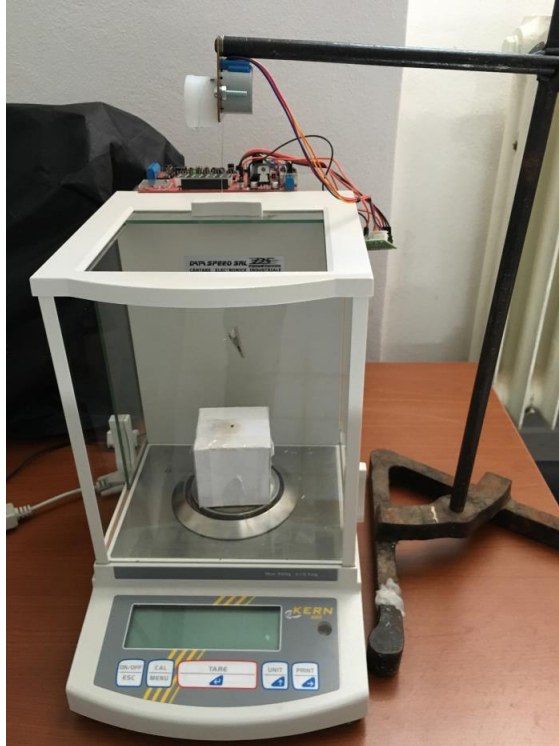
időben hogyan fordulnak elő ezek a megakadások, illetve azt is, hogy milyen ezeknek a megakadásoknak a nagyságeloszlása.

A továbbiakban kísérleti mérések segítségével ezt a második kérdést vizsgáljuk, azaz meghatározzuk kísérletileg a megakadások nagyságát jellemző gyakoriságeloszlás függvényét. Az eredményeket összevetjük néhány első közelítésben végzett számítógépes modellezéssel is.

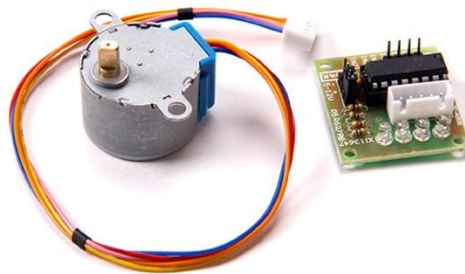
2.2 Megvalósítás

A kísérleti berendezésünket (3. ábra) házilag, a rendelkezésünkre álló eszközöket felhasználva állítottuk össze. Az összegubancolódott anyagot ipari kenderszálakból készítettük el, amelyet egy dobozban helyeztünk el. A dobozt egy laboratóriumi mérleg tányérjára erősítettünk.

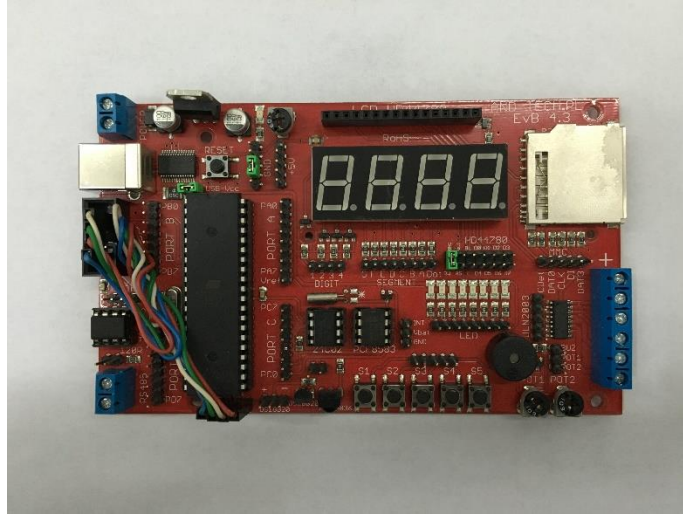
A doboz tetején egy kis lyukat vágtunk, ezen keresztül a gubancból egy szálát húztunk ki, amelyet egy állványra szerelt Atmel Atmega 16 típusú mikrovezérlő (5. ábra) által vezérelt állandó sebességgel működő 28BYJ-48 típusú léptetőmotorhoz (4. ábra) rögzítettünk vékony damil, valamint krokodilcsipesz segítségével. Az állandó sebességű húzást a motor valósítja meg, amely sebessége a számítógéppel összekapcsolt mikrovezérlő segítségével szabályozható. A laboratóriumi mérlegünk számítógéppel kommunikál, így a mérés során lehetőségünk van minden 200ms-ban egy mérést végezni és az eredményt rögzíteni.



(3. ábra) A mérésekhez használt kísérleti berendezés.



(4. ábra) A szál húzását végző 28BYJ-48 típusú léptetőmotor.



(5. ábra) A szál húzására használt léptetőmotort vezérlő Atmel Atmega16 mikrovezérlő.

A doboz súlyának és a szálban fellépő húzóerőnek az eredője időben változik a szál gubancban történő megakadásainak függvényében. Ezt az időbeni változást nagy pontossággal és jó időfelbontással tudjuk mérni a digitális mérleggel. Pontosabban ennek az erőkülönbségnek megfelelő tömeget mérjük, amit a gravitációs gyorsulással megszorozva erőt kapunk.

A szálkihúzás kísérletet sok szál esetén elvégeztük, két különböző húzási sebességre. A következőkben ezeknek a méréseknek az eredményeit ismertetjük.

2.3 Mérési eredmények

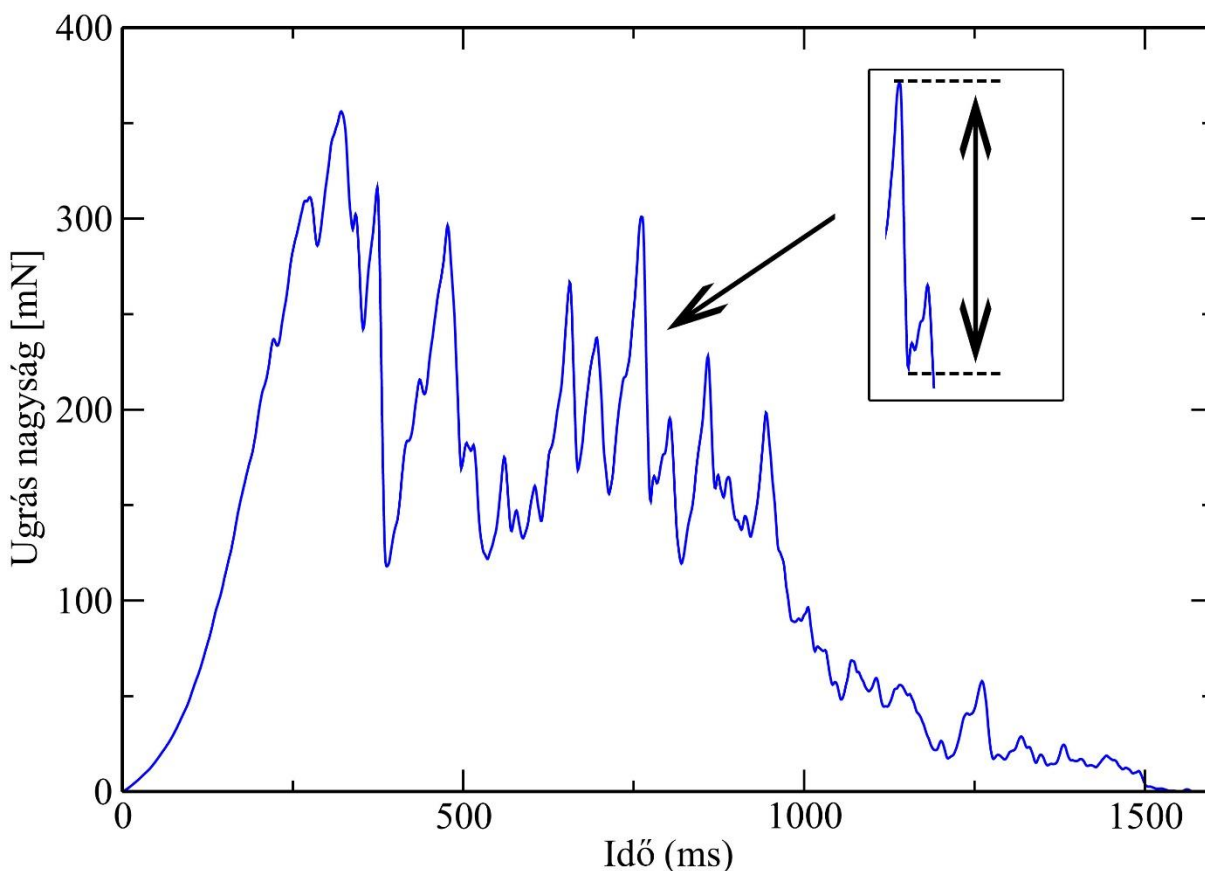
A mérések elvégzésére az előző fejezetben ismertetett berendezést használtuk. Ebben a fejezetben a mérési adatokra és azok feldolgozására, valamint a kapott eredmények elemzésére koncentrálnak.

Egy mérés során felvett erőgörbét ábrázoljuk a 6. ábrán az idő függvényében. Itt jól látható az, amit a kézzel történő szálkihúzás esetén is éreztünk, nevezetesen, hogy a húzás során a szál időnként megakad, majd kigubancolódik és tovább mozog. Mivel mindig a súlyerő és a szálban fellépő erő különbségét mérjük, a megakadások csökkenésekként jelentkeznek az erőgörbén. A megakadás utáni megcsúszásokkor a mért erő értéke megnő.

Az ábrán azt is megfigyelhetjük, hogy az ugrások nagysága nagyban eltér egymástól. Találunk sok kis ugrást, de szép számban jelentkeznek nagyobb ugrások is. Ez arra utal, hogy az

ugrások nagyságeloszlása nem egy jól meghatározott átlagérték körüli fluktuációt mutat. A 6. ábrán ábrázolt grafikonon példaként kiemeltünk egyetlen ugrást is.

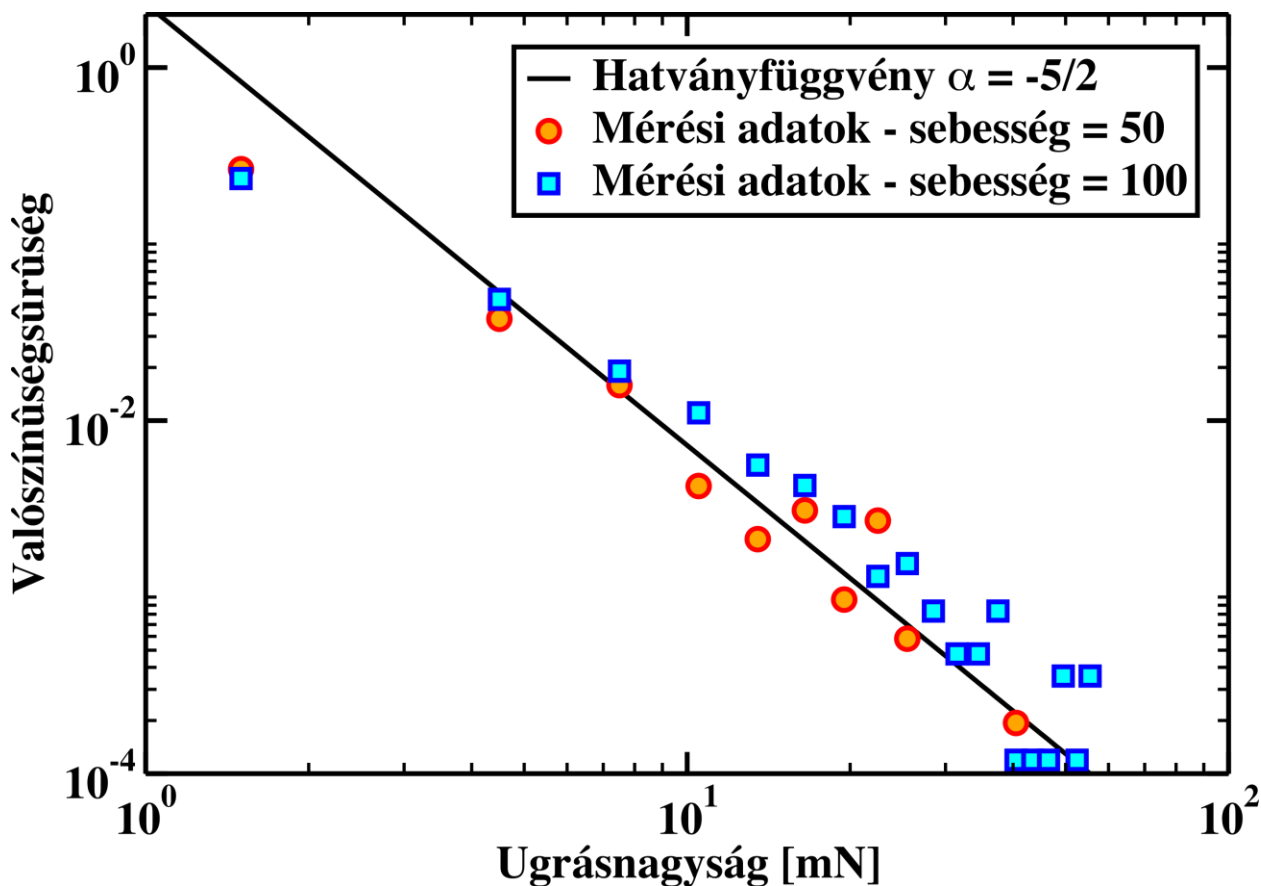
Minden mérés során rögzítettünk egy adathalmazt, amelyben a mérleg által mért tömegadatok szerepelnek. Az adatfájlokat egy Python programozási nyelvben megírt algoritmus segítségével dolgoztuk fel. Első lépésként beolvastuk a mért adatfájlt, majd a beolvasott adathalmazon megkerestük az összes lokális minimum és maximum pontot és tároltuk ezek pozícióját (indexét az adathalmazban). Tehát egy lokális maximum értékét úgy kapjuk meg, hogy az elmentett pozíciót behelyettesítjük az adathalmazba indexként. Következő lépésként dupla ciklus segítségével végigmentünk a lokális maximum és lokális minimum értékeken. Az ugrás nagyságát a közvetlenül egymást követő lokális maximum és lokális minimum különbsége adja meg. Ahhoz, hogy a tömegből erőt kapjunk, ezt az értéket is a gravitációs gyorsulással szorozzuk.



(6. ábra) A húzáskor létrejövő ugrások nagysága idő függvényében.

A kísérletünket két lassú húzási sebességre végeztük el. A léptetőmotorunk sebességét 0-tól 1000-ig állíthatjuk, ahol az 1000 a motor maximum sebességét jelenti. A kísérletünket lassú, 100-as és 50-es sebességekre végeztük. Azért választottunk két különböző értéket, hogy lássuk azt is, hogy a húzási sebesség befolyásolja-e a megakadások gyakoriságeloszlását.

A 7. ábrán látható hisztogramon az ugrások statisztikáját tüntettük fel, azaz ábrázoltuk az ugrások nagyságának a gyakoriságeloszlását. Kék négyzettel ábrázoltuk a mérési adatokat 100-es sebességre, valamint piros korongok ábrázolják eredményeinket a 50-as sebességre. A függőleges tengelyen az adott nagyságú ugrások előfordulásának gyakorisága szerepel, míg a vízszintes tengely az ugrások nagyságát ábrázolja mN mértékegységben. Az ábrák értelmezése szempontjából fontos megjegyeznünk, hogy mindkét tengely logaritmikus skálán van értelmezve. A hisztogramon fekete vonallal ábrázoltunk egy $-5/2$ -es kitevőjű hatványfüggvényt viszonyítási alapként.



(7. ábra) Az ugrások nagyság szerinti eloszlása két különböző sebességre.

Eredményként mindkét sebességre hatványfüggvény eloszlást kaptunk. Erre abból következtetünk, hogy a mérési adatok a logaritmikus skálán egyenes trendet követnek kb. két nagyságrenden keresztül.

Az elvégzett kísérletek, illetve a kapott adatok elemzése után következtetésként levonhatjuk, hogy a mérések hibahatárán belül az ugrások gyakorisága nem függ a húzási sebességtől és közel $-5/2$ -es kitevőjű hatványfüggvény eloszlást mutat.

Komplex rendszerek esetén a hatványfüggvény eloszlások olyankor jelentkeznek, mikor a rendszerben kritikus önszerveződés jelenségét tapasztaljuk. A jelenség lényege, hogy bizonyos komplex rendszerekben spontán módon rendezettség alakulhat ki, ha a rendszert jellemző egyes paraméterek kritikus értékűek lesznek. Ilyenkor a rendszert jellemző makroszkopikus mennyiségek hatványfüggvény eloszlást mutatnak. Ezt tapasztalhatjuk például a homokdomb sejtautomata modellek esetén, ha a lavinák nagyságeloszlását vizsgáljuk [4]. A kapott $-5/2$ -es kitevő alapján arra következtetésre juthatunk, hogy a jelenség ugyanabba az univerzalitási osztályba tartozik mint a szálköteg (fiber bundle) modelleknél kapott erőugrások lavina-szerű viselkedése [9].

A következő fejezetben számítógépes szimulációval fogjuk vizsgálni, hogy az általunk vizsgált rendszerben milyen rendezettség megjelenéséről beszélhetünk, melynek a következménye az ugrások nagyságeloszlásának hatványfüggvény jellege.

3. Szimuláció

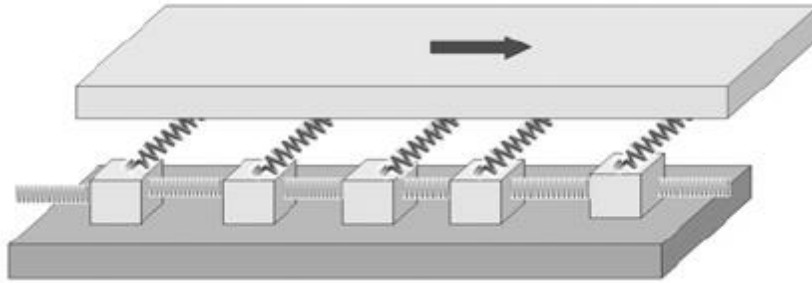
A kísérleti vizsgálat után a következő lépést a rendszer modellezése jelentette. Célunk egy olyan modellt készíteni, amely alátámasztja a kísérletileg kapott eredményeinket, és választ ad arra a kérdésre, hogy a komplex rendszerre jellemző kritikus önszerveződés során milyen rendezettség alakul ki. A rendszer modellezésére két különböző, egymástól független modell típust használtunk. Első sorban a rugó-tömb típusú modellt, majd a modellezést hálózatok segítségével végeztük el.

Ebben a fejezetben szó esik a modellezések elképzeléseiről, megvalósításairól és eredményeiről.

3.1 Rugó-tömb típusú modellek

A szál kihúzásakor létrejövő ugrásokat az úgynevezett rugó-tömb modell segítségével szimuláljuk. Ez a modellcsalád 1967-ben jelent meg, amikor R. Burridge és L. Knopoff [3] épített egy mechanikai modellt a Guttenberg-Richter törvény magyarázatára, amely a földrengések nagyság szerinti eloszlását írja le. A modell fő alkotóelemei a testek és a rugók, amelyek összekapcsolódnak rácsszerű elrendezésben. A tömbök súrlódással csúszkálhatnak egy sík felületen, és szintén rugókkal a felső laphoz vannak kötve, melyet egyenletes sebességgel húzunk. A Burridge és Knopoff által eredetileg bevezetett rendszer egy egydimenziós modell volt. A Burridge-Knopoff modellt (8. ábra) numerikusan is tanulmányozhatjuk, amelynek eredményeként láthatjuk a kritikus önszerveződést [4]. Az említett modell új perspektívákat nyitott a számítógépes modellezés módszereiben. A Burridge-Knopoff modell változatai hasznosnak bizonyultak a komplex jelenségek leírásánál, ahol lavina effektus van jelen, a mintázatképződő jelenségeknél és a szilárdtest fizikában vagy akár az anyagtudományokban [6].

A rugó-tömb modellek dinamikájának szemléltetéséhez először egy intuitív magyarázatot adunk. Képzeljük el, hogy van egy tömbünk, amelyet egy rugóhoz kapcsolunk és azt egy állandó erővel húzzuk. Majd hirtelen a rugalmas erő legyőzi a tapadási súrlódást, amely a tömb és az alatta levő felület között lép fel, a tömb megcsúszik és egyenes vonalú egyenletes mozgást fog végezni. Az előbbi egyszerű elképzelés szerint semmi szokatlan nem történik, viszont ha több tömböt kapcsolunk össze rugókkal, akkor összetett viselkedést tapasztalunk. A tömböket sorban rugókkal kapcsoljuk össze, ugyanakkor minden tömböt egy rugóval egy felső síkhoz rögzítünk (8. ábra). Amikor a felső síkot egy állandó erővel húzni kezdjük, kezdetben a tömbök nyugalomban maradnak, csak a síkhoz kapcsolódó rugók nyúlnak meg. Ezt követően egy tömb megcsúszik, amely előidézi néhány szomszédos tömb megcsúszását is. Így tovább, az újabb szomszédos tömbök is megcsúsznak. Ennek a következménye egy lavina jelenség. A vázolt folyamat egy jellemző példája az önszerveződésnek, amely minden Burridge-Knopoff modell kulcsfontosságú tényezője.



(8. ábra) Egydimenziós Burridge-Knopoff modell.

Forrás: Z. NÉDA, F. JÁRAI-SZABÓ, E. KÁPTALAN, R. MAHNKE, Control Engineering and Applied Informatics 11, 3-10, (2009).

A rugó-tömb modellek rengeteg formában használatosak, különböző elrendezésekben. A modell a kritikus önszerveződés és lavina jelenségek leíró rendszerévé vált.

Térjünk vissza a Burridge-Knopoff modell és a Gutenberg Richter törvény [6] kapcsolatához. A Gutenberg-Richter törvény azt mondja ki, hogy a földrengések nagyságeloszlása hatványfüggvény jellegű. Ugyanilyen hatványfüggvény eloszlást kapunk, ha a Burridge-Knopoff modell lavináinak nagyságeloszlását vizsgáljuk. Ez a hatványfüggvény eloszlás utal arra, hogy a rendszerben kialakuló lavinák a kritikus önszerveződés következményei.

3.1.1 Az elkészített modell megvalósítása

A modellünket a rugó-tömb modell alapján valósítottuk meg. Egy síkra azonos tömegű tömböket helyeztünk, amelyeket azonos rugóállandójú rugókkal kapcsolunk össze. Ez jelképezi a gubancból kihúzandó rugalmas szálát. A testek jelképezik azokat a pontokat, melyek a gubanc többi szálába vannak beakadva. A testek és a lap közti tapadási surlódás értéke véletlenszerűen változik egy adott intervallumban. A mozgó testek és a felület között csúszási surlódás hat, amit úgy modellezünk, hogy a tapadási surlódási erő maximális értékének η -szorososa.

Az első tömböt egyenletes erővel húzva az első rugó megnyúlik, majd amikor a rugalmassági erő legyőzi az első tömb tapadó surlódását, az első tömb megcsúszik (azaz elszakad a szál és a gubanc kötése) és mozogni kezd. Ezt követően megcsúszhat az említett lavinaelv szerint az azt követő és így tovább. A csúszás-lavina leállása után ismét nyugalomba kerülnek a testek, majd újabb lavinák kialakulása várható. Ez jelenti az előző fejezetekben

tárgyalt szál húzásánál megjelenő megakadásokat és ugrásokat. Kiszámíthatjuk, hogy a kihúzott szál milyen erővel hat a gubancra. Ez nem lesz más, mint a testekre ható súrlódási erők eredője.

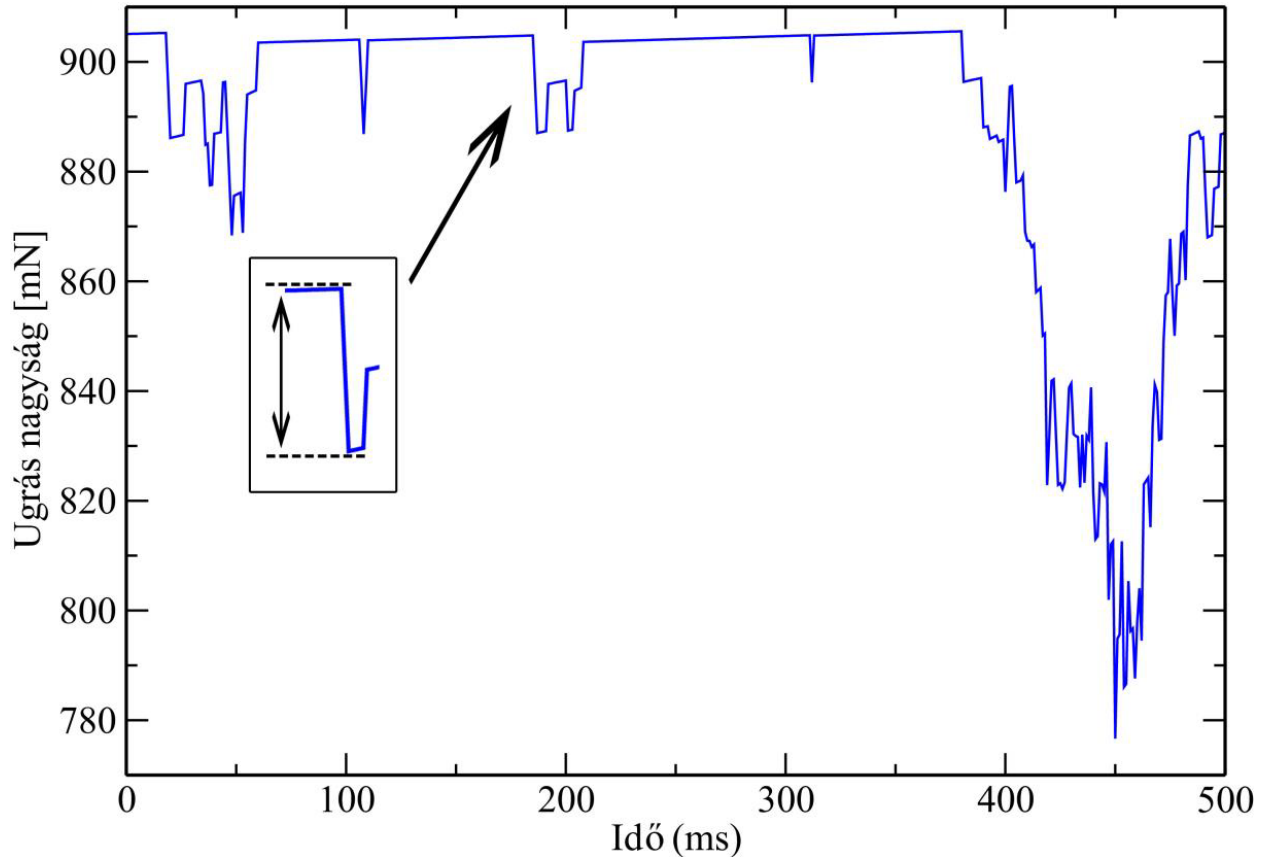
A modellünkre számítógépes programot írtunk C programozási nyelvben, amelyet a megfelelő paraméterekre és sokszámú tömbre futtattunk.

A szimulációs program algoritmusváza a következőképpen néz ki:

- a.) adatok beolvasása
- b.) dinamika
 - Rugalmas erő kiszámítása
 - Súrlódási erő kiszámítása
 - Eredő erő kiszámítása
 - Tömbök léptetése
- c.) gubancra ható eredő erő kiszámítása
- d.) eredmények kiírása

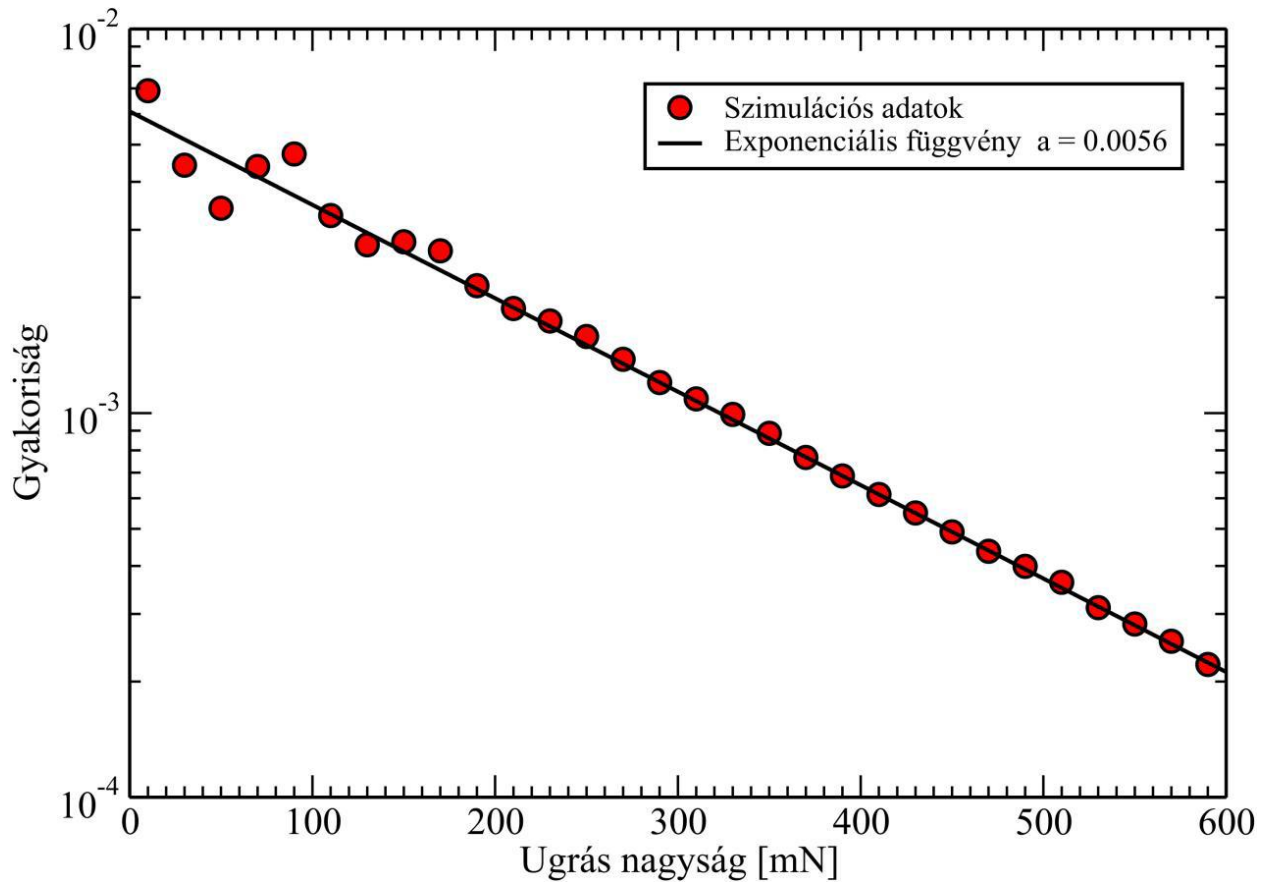
3.1.2 Eredmények

A szimuláció során kiszámítottuk, hogy mekkora eredő erő hat a gubancra a szál részéről. Ezt az erőt az idő függvényében ábrázoljuk a 9. ábrán. Itt is jól láthatók, az erőgörbe ugrásai, mint azt a 6. ábra mérési eredményein is láthattuk. A Burrdge-Knopoff modellek ismeretében elmondhatjuk, hogy ezeket az ugrásokat a rendszerben kialakuló megcsúszás-lavinák okozzák. Ezt úgy képzelhetjük el, hogy a szál és a gubanc szálainak egyik összetapadt pontja elszakad, szabadon mozogni kezd. Ennek következtében más tapadási pontokat is elszakíthat és ebben a formában kialakulhat a lavinahatás.



(9. ábra) A szimulációban számolt eredő erő az idő függvényében

Az erőgörbén detektáljuk az ugrások nagyságát, majd ezek alapján elkészítjük az ugrások nagyságának gyakoriság-eloszlását. Ez látható a 10. ábrán bemutatott hisztogrammon. Az értelmezésnél figyelembe kell vennünk, hogy itt csak a függőleges tengelynél használtunk logartimikus skálát. Az eloszlásfüggvény képe egyenes, ami azt jelenti, hogy a modell által adott lavinák nagyságeloszlása exponenciális. Így az adatokra exponenciális függvényt illesztettünk, amely eltér a kísérleti eredményektől, amelyek esetében hatványfüggvény eloszlást kaptunk.



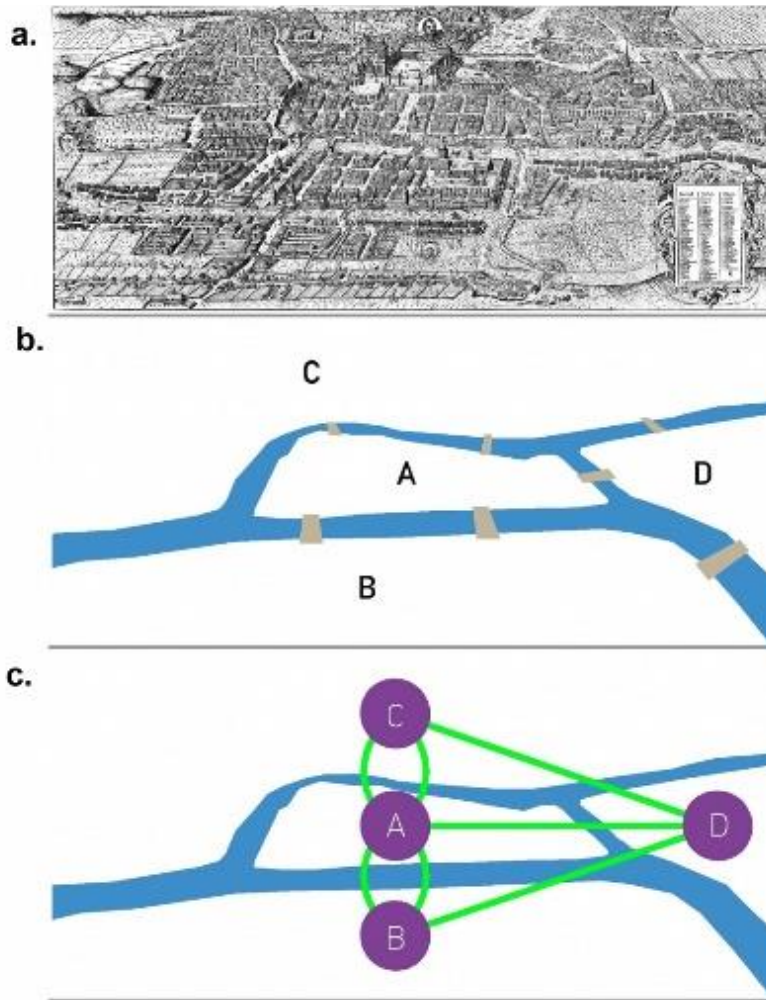
(10. ábra) Az ugrások nagyság szerinti eloszlása a szimulációs adatok alapján.

A modellezés és a kísérletek ilyen jellegű eltérése arra enged következtetni, hogy a modellezés során nem vettünk figyelembe valami fontos tényezőt. A Burrige-Knopoff modelleknél ismert hatványfüggvény viselkedéshez képest most exponenciális viselkedést kapunk. Modellünk abban tér el a hagyományos Burrige-Knopoff modellektől, hogy itt nincs egy felső sík, melyhez a testeket rugókkal köthetjük és azt állandó sebességgel mozgassuk.

A számítógépes modellezésből megállapíthattuk, hogy a rendszerben önszerveződő lavinák alakulnak ki. Ezek okozzák a szálkihúzás során tapasztalható megakadásokat és megcsúszásokat. A számítógépes modellünk esetében az ugrások eloszlása exponenciális függvényt követett, ami eltér a kísérletben tapasztaltaktól.

3.2 Modellezés hálózatok segítségével

Egy hálózatot vagy gráfot pontok, úgynevezett csomópontok, és ezeket összekapcsoló vonalak, úgymond élek, alkotnak. A hálózatok vizsgálatának elméleti alapját a matematikában ismert gráfelmélet képezi [7]. A gráfelmélet azaz a hálózatok kutatás matematikai váza 1735-ben jött létre Königsbergben, Kelet-Poroszország fővárosában. A kereskedővárosban a Pregelre folyóra hét darab hidat építettek. A hét hídból öt a folyó két ága által közrefogott szigetet kötötte össze a város többi részével (11. ábra). A hidak elrendezése egy kérdést adott a kor gondolkodóinak: végig lehet-e járni a hét hidat, úgy, hogy mindengyiken csak egyszer keljünk át? Euler volt az első, aki ezt a matematikai problémát gráfok segítségével oldotta meg. Rámutatott, hogy a hálózatok működését milyenformán korlátozhatják, vagy segíthetik a szerkezetük által megszabott tulajdonságok [8]. Egy hálózatot megadhatunk úgy, hogy ismerjük a csomópontokat és a közöttük létező kapcsolatot, amelyeket az élek valósítanak meg [7]. Fontos hálózati jellemző a csomópontok száma, amelyet a hálózat méretének is nevezünk [8]. Példaként említhetünk a légitársaságok hálózatát, ahol a repülőterek jelentik a csomópontokat, míg két repülőter közötti járatok az éleket, vagy összekötéseket [7].



(11. ábra) Königsbergi hidak. Forrás: [8]

3.2.1 Az elkészített modell megvalósítása

A kísérletileg kapott eredmények alátámasztásához hálózatokra alapozott modellt készítettünk.

Az összegubancolódott anyagot egy olyan hálózattal szemléltetjük, amelyet csomópontok és élek alkotják. Esetünkben az élek rugalmasak, rendelkeznek egy klasszikus rugalmassági állandóval. A csomópontok jelentik a különböző szálak összegubancolódási, összetapadási pontjait, míg az élek a kontakt pontok közti szálakat modellezik. A hálózatunkat egy térben súrlódással rendelkező síkfelületre helyezük. A modell során a rendszerünket a hálózatunk egy csomópontjától fogva állandó sebességgel húzzuk. Szálkihúzás esetén a gubancban történő megakadásokat a modellünkben a csomópontok felülethez tapadása, majd hirtelen elmozdulása, bizonyos esetekben a csomópontok (szálgubancok) megszűnése jelenti.

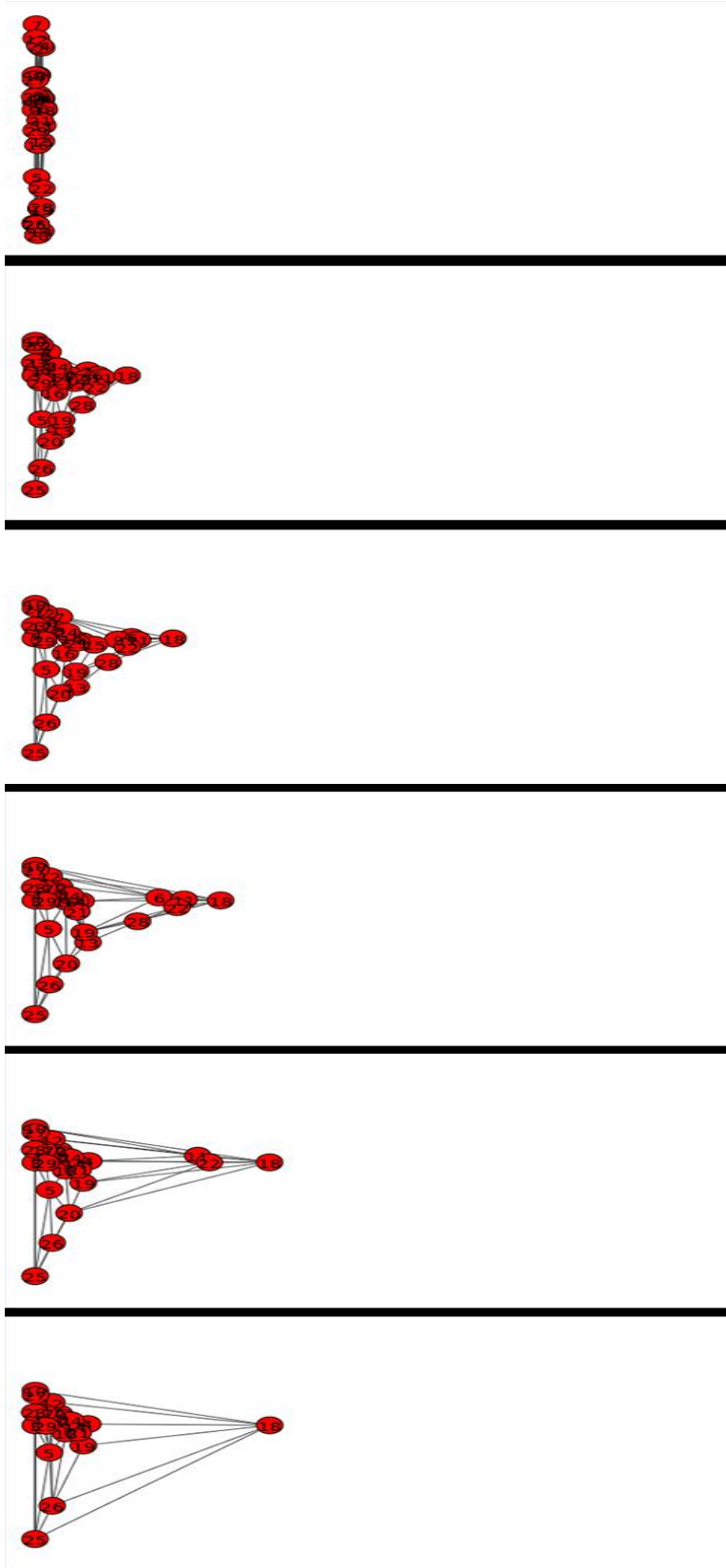
A hálózat elkészítésére véletlen térhálózat-szerkesztést alkalmaztunk, amelyet a Delauney-háromszögelés módszerével végzünk. Egy adott, térben véletlenszerűen elhelyezett ponthalmaz (a csomópontjaink halmaza) esetén a Delauney-háromszögelés egy olyan egyenes vonalakból álló vonalhálózat megszerkesztése, amelynek sokszögtartományai köré írt körei csak határukon tartalmazzák a ponthalmaz pontjait [10]. Gyakorlatban úgy kötjük össze a csomópontjainkat, hogy háromszögeket kapjunk és a háromszögek élei ne metszék egymást.

A modellben a csomópontokat összekötő élek rendelkeznek rugalmas tulajdonságokkal. Ezt egy klasszikus rugalmas erővel modellezzük. A rugalmassági állandót véletlenszerűen generáljuk 0,1 és 2 között. A rugóink egyensúlyi hosszának a két csomópont közti kezdeti távolságot vettük, hogy kezdetben ne legyen feszültség a rendszerben. Minden csomópont és a felület között hat klasszikus Coulomb-féle súrlódási erő, a tapadási súrlódási állandó értékét minden csomópontra véletlenszerűen generáljuk a [180, 200] intervallumban.

A rendszerünk modellezésére túlcillapított dinamikát használunk, amely azt jelenti, hogy a viszkóзитás a rendszerben jelentős mértékű. Ennek eredménye, hogy a csomópontok mozgásának leírásakor a mozgásegyenletek megoldása leegyszerűsödik, és gyakorlatilag minden időlépésben a csomópontok elmozdulása egyenesen arányos a ráható eredő erővel. A rendszerünket egy előre kiválasztott csomóponttól fogva egyenletes sebességgel húzzuk, amely következtében egy idő elteltével minden csomópont elmozdul (12. ábra). Kezdetben kiszámoljuk

az élekben fellépő rugalmassági erőket, és a hozzájuk tartozó x és y irányú erőkomponenseket. Kiszámoljuk a csomópontokra ható eredő erőket. Ha az eredő erő nagysága kisebb, mint a tapadási súrlódási erő maximális értéke, akkor a csomópont nyugalomban marad, azaz a rá ható eredő erő zérus lesz. Ellenkező esetben a csomópontra a csúszási súrlódási erő is hat.

Következő lépésben kiszámoljuk az egyes csomópontokra ható erők moduluszainak összegét, majd megnézzük, hogy ez az összeg nagyobb-e egy általunk előre megadott maximális értéknél (f_b paraméter). Ha nagyobb, akkor a csomópontban szakadás jön létre, így eltűnik a csomópont. Ezzel azt modellezzük, hogy a nedszerünkben a felgyülemlett feszültség hatására egy gubanc kibomlik. Csomópontok törlése esetén újra alkalmazzuk a Delauney-háromszögelést, hogy a hálózatot újrahunalozzuk.

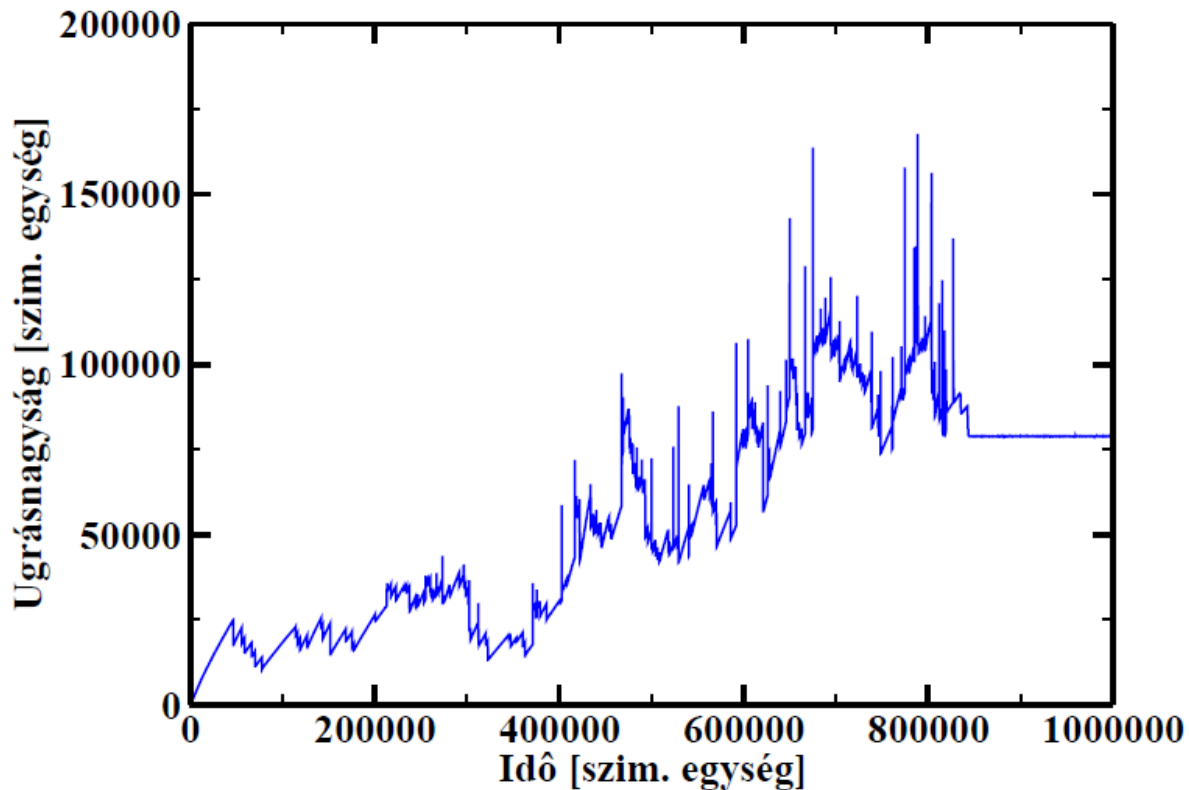


(12. ábra) Kis méretű szimulációs hálózat különböző időpillanatokban ábrázolva.

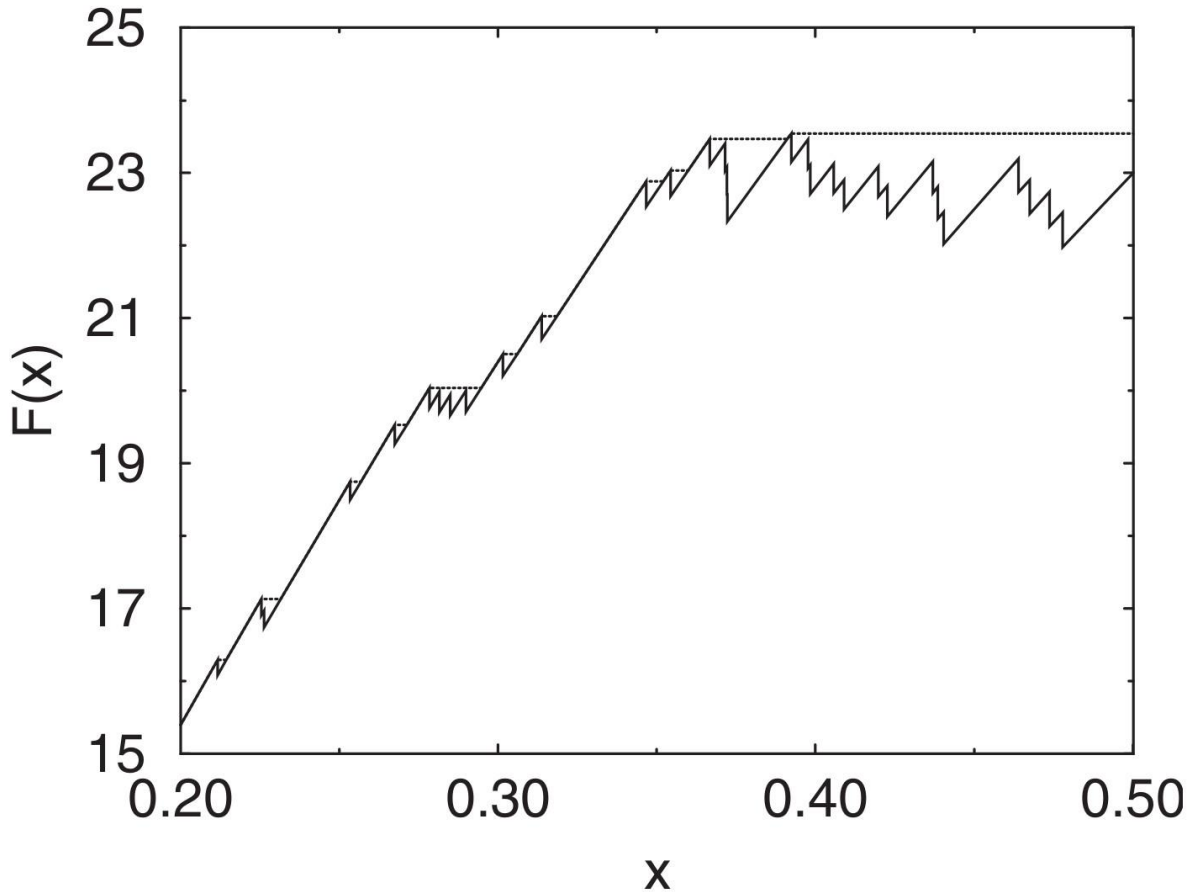
3.2.2 Eredmények

A szimuláció során kiszámítottuk, hogy mekkora eredő erő hat a gubanc részéről a húzott csomópontra. Ezt az erőt az idő függvényében ábrázoljuk a 13. ábrán. Megfigyelhetjük az erőgörbe ugrásait, amelyek nagyon hasonlítanak a 6. ábrán szemléltetett kísérleti ugrásokra. Jelen esetben is megfigyelhetjük, hogy lavina hatás lép fel. A csomópontok megakadnak, annak következtében, hogy a csomópontok és a sík felület között tapadási súrlódás lép fel. Ha a rendszerben azonban megfelelő feszültség összegyűl, egy csomópont megcsúszása a többi csomópont lavinaszerű megcsúszását vonhatja maga után.

A 14. ábra szálkötegek húzása esetén modellezett tipikus erőgörbét mutat. Ezt összevetve az általunk kapott szálkihúzás erőgörbéjének első felével mondhatjuk, hogy nagyfokú hasonlóságot tapasztalunk. A görbénk második felének eltérő viselkedése azzal magyarázható, hogy az idő elteltével rendszerünkben nagyszámú csomópontot törünk.



(13. ábra) A szimulációban számolt eredő erő az idő függvényében



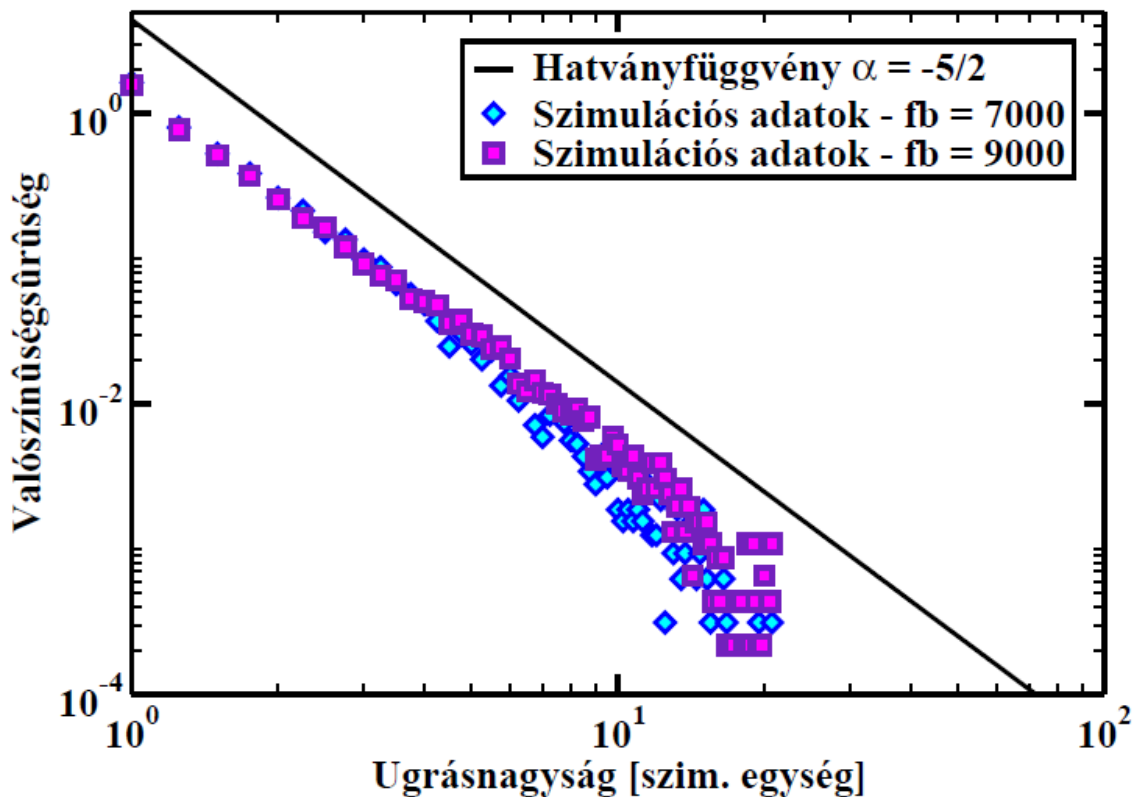
(14. ábra) Szálkötegek esetén létrejött erőgörbe. Forrás: [9]

Az erőgörbe elemzésével hozzájutunk az ugrások nagyságához, így elkészíthetjük a 15. ábrán látható hisztogramot, amely az ugrások nagyságának gyakoriság-eloszlását szemlélteti. A hisztogram értelmezésnek szempontjából figyelembe kell veyük, hogy mind két koordinátatengely logaritmikus skálán szerepel. Az ábránkon két eloszlásfüggvényt ábrázoltunk, amelyeket az f_b paraméterrel különböztetünk meg. Ez a paraméter egy előre rögzített maximális erő. Ha az egyes csomópontokra ható erők moduluszainak összege nagyobb, mint az f_b , akkor szakadás jön létre és eltűnik a csomópont. A szimulációnkat két különböző értékre végeztük el: $f_b=7000$ illetve $f_b=9000$.

Az eloszlásfüggvény képe egyenes így arra enged következtetni, hogy a megjelenő lavinák nagyságeloszlása hatványfüggvény. A szimulációs adatokra egy hatványfüggvényt illesztettünk, majd megvizsgáltuk annak hatványkitevőjét. Eredményül azt kaptuk, hogy a

hatványfüggvény kitevője közel $-5/2$, amely megegyezik a kísérletileg kapott eredménnyel, illetve a szálkötegek esetén kapott hatványkitevővel is [9].

Annak következtében, hogy a szimuláció során kapott hatványfüggvény megegyezik a kísérletileg kapott hatványfüggvénnyel, azt mondhatjuk, hogy a rendszerünkben kritikus önszerveződés lép fel, melynek oka a lavinahatásban keresendő.



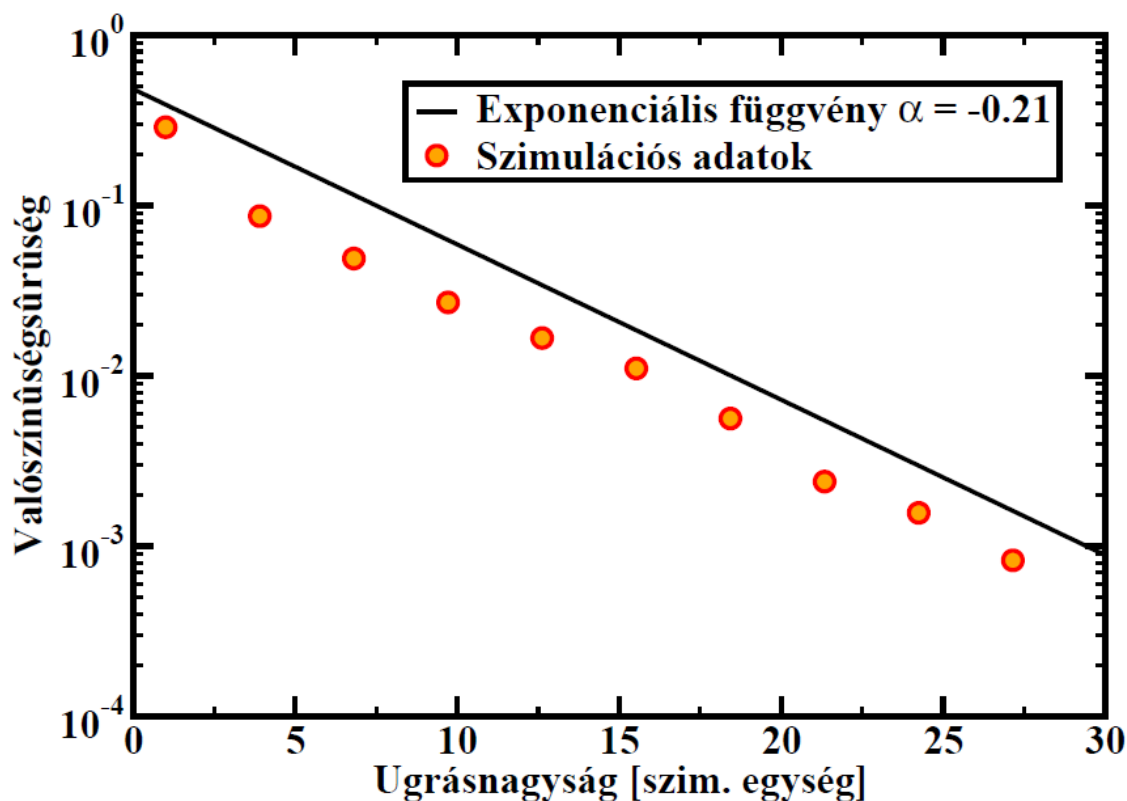
(15. ábra) Az ugrások nagyság szerinti eloszlása a szimulációs adatok alapján.

3.2.3 A csomópontokban létrejövő szakadások fontossága

A lavinahatás mellett fontosnak találtuk a kigubancolódás hatását is a szimulációs eredményekben. Ennek vizsgálatára egy olyan dinamikát is megvizsgáltunk, melyben a csomópontok megszűnése, azaz a szálak kigubancolódása nem volt jelen. Az így kapott ugrások nagyságának gyakoriság-eloszlását szemléltető hisztogramot a 16. ábrán figyelhetjük meg. A hisztogramunknak csak az egyik koordinátatengelye van logaritmikus skálán értelmezve. Az így

szimulált gyakoriságadatok képe egyenes, amely arra enged következtetni, hogy a rendszerben fellépő lavinák nagyságeloszlása exponenciális függvényt ad. A rugó-tömb típusú modellek segítségével készített szimulációnk eredményeképpen is exponenciális nagyságeloszlást kaptunk.

Következtetésképpen azt mondhatjuk, hogy a csomópontok megszűnése gyökeresen befolyásolja a rendszerünk viselkedését. Enélkül is megjelennek a rendszerben a lavinák, viszont azok nagyságeloszlásának hatványfüggvény jellege nem magyarázható. Ahhoz, hogy kritikus, hatványfüggvény-szerű viselkedést kapjunk mindenképp szükség van a gubancok kibomlásának lehetőségére is.



(16. ábra) Az ugrások nagyság szerinti eloszlása a szimulációs adatok alapján, olyan esetben, mikor nincsenek jelen a csomópontok megszűnése

4. Következtetés

Dolgozatunkban szálas szerkezetű, összegubancolódott komplex rendszer viselkedését tanulmányoztuk abban az esetben, ha a rendszerből szálakat húzunk ki. A vizsgálatot elvégeztük az általunk készített kísérleti berendezés, valamint számítógépes szimuláció segítségével is. A kísérleti mérések eredményeként az erőgörbék ugrásainak nagyságeloszlása hatványfüggvény viselkedést mutat, ami a rendszerben kialakuló kritikus önszerveződés eredménye. A számítógépes modellezésből megállapíthattuk, hogy a rendszerben önszerveződő lavinák alakulnak ki. Ezek okozzák a száلكihúzás során tapasztalható megakadásokat és megcsúszásokat. Ezeket a lavinákat több számítógépes modellel is sikerült reprodukálnunk, viszont a lavinák nagyságeloszlásának hatványfüggvény jellegét csak egy olyan hálózatmodell keretében kaptuk vissza, ahol lehetőség volt a gubancot alkotó szálak kigubancolódására, azaz a szálak közti kölcsönhatások megszűnésére is. Ennek a számítógépes modellnek a keretében az ugrások eloszlása hatványfüggvényt követett, amely megegyezik a kísérletben tapasztaltakkal. A kísérletekben mért és szimulációkban reprodukált $-5/2$ -es hatványkitevő arra utal, hogy a vizsgált jelenség ugyanabba az univerzalitási osztályba sorolható, mint a száلكötegek húzása, ahol hasonló hatványkitevőket kaptak az erőgörbék elemzésekor.

5. Irodalomjegyzék

- [1] Masse, J-P., and Dominique Poquillon. "Mechanical behavior of entangled materials with or without cross-linked fibers." *Scripta Materialia* 68.1 (2013): 39-43.
- [2] Durville, Damien. "Numerical simulation of entangled materials mechanical properties." *Journal of materials science* 40.22 (2005): 5941-5948.
- [3] R. Burridge, L. Knopoff, *Bull. Seim. Soc. AM.* **57**, 341 (1967)
- [4] P. Bak, *How Nature Works: The science o Self-Organized Criticality*, Copernicus, New York (1996)
- [5] K. Kovács, Y. Brecket, Z. Néda *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.* **13** (8), 1341 (2005)
- [6] B. Gutenberg and C. F. Richter, *Ann. Geophys.* **9**, 1 (1956)
- [7] [Harvey_Gould,_Jan_Tobochnik,_Wolfgang_Christian, *Introduction tu Computer Simulation Methods* (3rd edition Addison-Wesley, 2006)]
- [8] . Barabasi Albert László, *Hálózatok tudománya* (Libri 2016)
- [9] Pradhan, S., Hansen, A., and Chakrabarti, B.K. (2010) Failure processes in elastic fiber bundles. *Rev. Mod. Phys.*, 82, 499.
- [10] Wikipedia, Delauney-háromszögelés