XI. Erdélyi Tudományos Diákköri Konferencia – Kolozsvár, 2008. május 23–24.

Normális függvénycsaládok. Alkalmazások harmonikus függvényekre.

Szerző: Darvas Tamás
Matematika-Informatika szak, IV. év
Babeş-Bolyai Tudományegyetem

Konzulens: Dr. Bulboacă Teodor
professzor, Függvényelmélet Tanszék
Babeş-Bolyai Tudományegyetem

2008. május 13.

Kivonat

A dolgozatban a normális függvénycsaládok eszközeit fogjuk felhasználni harmonikus függvényekre vonatkozó klasszikus eredmények igazolására. Névlegesen bizonyítani fogjuk a Harnack elvre és Harnack becslésekre vonatkozó tételeket. Az új módszer lehetőséget ad a Harnack elv kiterjesztésére. Végezetül példákkal fogjuk alátámasztani, hogy az új eredmény feltételei erősek.

Kulcsszavak: harmonikus függvények, normális függvénycsaládok, Harnack elv, Harnack becslések;

1. Zalcman, Montel és Hurwitz tételei

Legyen D egy tartomány a komplex számsíkban. Ekkor $u : D \to \mathbb{R}$ C^2 osztályú függvény **harmonikus** D-n, akkor és csak akkor, ha

$$\frac{\partial^2 u(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(z)}{\partial y^2} = 0, \ \forall z \in D.$$

A következő jól ismert eredmény kapcsolatot teremt a harmonikus es a holomorf függvények között.

1. Tétel. *Ha D egyszeresen összefüggő tartomány és $u : D \to \mathbb{R}$ harmonikus D-n, akkor létezik a $v : D \to \mathbb{R}$ harmonikus függvény, amelyre $f(z) := u(z) + iv(z)$ holomorf a D halmazon.*

Komplex függvénytanban az általános Montel tétel hosszú ideig nehezen bizonyítható eredményként volt számon tartva. Meglepő módon, a Zalcman lemma[2] megjelenése után, több elementáris bizonyítás is született erre a központi fontosságú eredményre. Az alábbiakban Zalcman nyomán járva[3] igazoljuk a Montel tételt.

1. Lemma (Zalcman). *Legyen F egy meromorf függvénycsalád az U nyílt halmazon, amely***nem normális***. Ekkor létezik a $\bar{z} \in U$ pont, $(z_n)_n \subset U$, $0 < \rho_n \to 0$ és $(f_n)_n \subset F$ sorozatok úgy, hogy:*

1. $z_n \to \bar{z}$
2. $g_n(\zeta) = f_n(z_n + \rho_n \zeta)$ *sorozat konvergál egy nemkonstans $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, \mathbb{C}_\infty)$ függvényhez, amelyre $|g^\sharp(\zeta)| \leq |g^\sharp(0)| = 1$.*

2. Tétel (Montel). *Legyen U egyszeresen összefüggő tartomány és $(f_n)_n \subset \mathcal{O}(U, \mathbb{C}_\infty)$. Ha $\bigcup_n f_n(U)$ nem tartalmaz három pontot a kiterjesztett komplex síkból, akkor f_n normális(kompakt).*

Bizonyítás. Mivel létezik olyan lineáris törttranszformáció amely tetszőleges három pontot a 0,1 es ∞ pontokba visz at, feltételezhetjük, hogy $\{0, 1, \infty\} \bigcap f_n(U) = \phi$. Mivel $0 \notin f_n(U)$, értelmezhetőek a következő $(f_n^k)_n$ függvényosztályok:

$$f_n^k := (f_n)^{\frac{1}{2^k}}$$

Észrevehető, hogy az $(f_n^k)_n$ függvényosztály elemei nem veszik fel értékként a 2^k-ad rendű egységgyököket. Ha feltételezzük, hogy $(f_n)_n$ nem normális, akkor egyetlen $(f_n^k)_n$ sem lesz normális függvénycsalád.

Felhasználva a Zalcman lemmát kapjuk, hogy léteznek a G_k egész függvények amelyek rendre "elkerülik" a 2^k-ad rendű egységgyököket $|G_k^\sharp(0)| = 1$ és $|G_k^\sharp(z)| \leq 1$ $\forall z \in \mathbb{C}$. A Marty tétel [4] szerint a $(G_k)_k$ függvénycsalád normális. Ha vesszük G_k valamely konvergens részsorozatának G határérték függvényét, kapjuk, hogy az szinten egész függvény. G nemkonstans hiszen $G^\sharp(z) = \lim_{k\to\infty} G_k^\sharp(z) = 1$. Mivel G nyílt leképezés kapjuk, (felhasználva a Hurwitz lemmát) hogy G elkerüli az S^1 egységgömböt. A Liouville tételből következik, hogy G konstans, ami ellentmondás. Ezzel igazoltuk az állításunkat. $\square$

1. Megjegyzés. *Mivel a normalitás a függvénycsaládok lokális tulajdonsága, következik, hogy az általános Montel tétel igaz tetszőleges nyílt halmazokra is. Vegyük észre, hogy a bizonyításban az egyszeresen összefüggőséget csak ott használtuk, amikor a gyökfüggvényeket bevezettünk. Ezt lokálisan megtehetjük tetszőleges nyílt halmaz esetén is.*

Az általános Montel tétel meromorf függvényekre vonatkozó állítás. Mint ahogyan azt nagyon jól tudjuk a harmonikus függvények nem veszik fel értékként a "végtelen" pontot(ellentétben meromorf függvényekkel). Ez a természetes probléma, mihelyt fellép, a meromorf függvényekre vonatkozó Hurwitz lemmával lesz "elsimítva".

3. Tétel (Hurwitz). *Legyen U egy nyílt halmaz $\mathbb{C}$-ben és $(f_n)_n \subset \mathcal{O}(U, \mathbb{C}_\infty)$ függvénysorozat, amely kompakt konvergál egy f meromorf függvényhez. Ha f nem konstans és $w_0 \in f(U)$, akkor létezik $n_0 \in \mathbb{N}$, úgy hogy $w_0 \in f_n(U)$ $\forall n \geq n_0$.*

2. Harnack becslései harmonikus függvényekre

1. Definíció. *A* ***Caratheodory függvényosztálynak*** *nevezzük a következő függvényhalmazt:*

$$P = \{p : \Delta \to \mathbb{R} |\ p\ harmonikus,\ p(z) > 0\ \forall z \in \Delta,\ p(0) = 1\}$$

4. Tétel (Harnack). *Legyen $0 < R < 1$. Ekkor léteznek a $H, h : (0,1) \to \mathbb{R}_+^*$ függvények, úgy hogy:*

$$h(R) < p(z) < H(R),\ \forall |z| = R.$$

2. Megjegyzés. *Harnack bizonyította, hogy a legjobb h es H függvények a következők:*

$$h(R) = \frac{1-R}{1+R},\ H(R) = \frac{1+R}{1-R}$$

Ez a bizonyítás felhasználja a pozitív harmonikus függvényekre vonatkozó Poisson féle integral-reprezentáció tételét. Mi ezt az eredményt a bizonyításunk során mellőzni fogjuk.

Bizonyítás. Legyen $\hat{P}$ a következő holomorf függvényosztály:

$$\hat{P} = \{f : \Delta \to \mathbb{C} |\ f\ holomorf,\ \Re f(z) > 0\ \forall z \in \Delta,\ f(0) = 1\}$$

Nyilvánvalóan a P és $\hat{P}$ halmazok között bijekció hozható létre a 1 tétel folytán. Vegyük észre, hogy a $\hat{P}$ egy eleme sem vesz értékeket az Oy tengelytől balra. Az általános Montel tételt használva kapjuk hogy $\hat{P}$ normális függvényosztály. Mivel $f(0) = 1\ \forall f \in \hat{P}$, kapjuk, hogy $\overline{\hat{P}} \subset \mathcal{O}(\Delta, \mathbb{C})$. Így, a klasszikus Montel tétel szerint létezik a $H : (0,1) \to \mathbb{R}_+^*$ függvény, amely teljesíti a $Ref(z) < |f(z)| < H(R)$ $\forall |z| = R$ feltételt (mivel a $\{z||z| = R\}$ halmaz kompakt).

A másik egyenlőtlenség igazolására más ötletre lesz szükségünk. Legyen P' a következő függvényosztály:

$$P' = \{e^{f(z)} |\ f \in \hat{P}\}$$

Vegyük észre, hogy $\forall f \in \hat{P}$-re $|e^{f(z)}| = e^{Ref(z)} > e^0 = 1$. Tehát a P' halmaz normális függvényosztály, mivel elemei nem "érintik" az egységsugarú korong belsejét (az általános Montel tétel miatt).

Feltételezzük, hogy a tétel kijelentésében az első becslés nem igaz. Ekkor létezik a $(z_n)_n$ es $(f_n)_n \subset \hat{P}$ sorozat amely teljesíti az alábbi feltételeket:

1. $|z_k| = R\ \forall k \in \mathbb{N}$
2. $e^{f_k(z_k)} \to e^{i\theta_0}\ \theta_0 \in [0, 2\pi)$

Mivel P' normális és $\{z : |z| = R\}$ kompakt halmaz, következik, hogy az f_n és z_n sorozatoknak létezik konvergens részsorozatai (amelyeket szinten ugyanezekkel az indexekkel jelölünk) amelyek konvergálnak valamely G meromorf függvényhez és $\bar{z} \in \Delta$ értékhez. Mivel $e^{f_n(0)} = e^1$ kapjuk, hogy a G függvény holomorf (Hurwitz lemma). Ugyancsak a Hurwitz lemmát alkalmazva kapjuk, hogy $G(\Delta) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}$. Viszont a kompakt konvergencia miatt $G(\bar{z}) = \lim_{k\to\infty} e^{f_k(z_k)} = e^{i\theta_0} \notin \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}$. □

3. A Harnack elv és annak egy általánosítása

A Harnack elv harmonikus függvénysorozatok határérték függvényére vonatkozó állítás. A klasszikus bizonyítások (például [1]) felhasználjak a Lebesgue monoton konvergencia tételt és a Poisson integral-reprezentáció tételt. Az alábbiakban egy olyan bizonyítást mutatunk be, amely csak az általános Montel tételt használja.

5. Tétel (Harnack elv egyszeresen összefüggő tartományokra). *Legyen D egy egyszeresen összefüggő tartomány és $u_1(z), u_2(z), ...$ harmonikus függvények D-n. Ha*

$$u_1(z) \leq u_2(z) \leq u_3(z) \leq ...,\ \forall z \in D$$

akkor $\overline{u}(z) = \lim_{n\to\infty} u_n(z)$ véges a D minden pontjában és harmonikus vagy $\overline{u}(z) = \infty,\ \forall z \in D$.

Bizonyítás. Ha $\lim_{n\to\infty} u_n(z) = \infty\ \forall z \in D$, akkor készek vagyunk, mert $\overline{u}(z) = \infty, \forall z \in D$. Feltételezzük tehát, hogy létezik $z_0 \in D$, úgy hogy $lim_{n\to\infty} u_n(z_0) = c_0 \neq \infty$. Nyilvánvalóan, azt is feltételezhetjük, hogy $u_i \geq 0$, hiszen ha ez nem állna fenn, akkor a bizonyítást elvégeznénk a $v_i := u_i - u_1 \geq 0$ függvényekre.

A 1 tétel következménye képpen, létezik az $(f_n)_n \subset \mathcal{O}(D, \mathbb{C})$ holomorf függvénysorozat, amelyre $\Re f_n = u_n$ és $\Im f_n(z_0) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

A konstrukció miatt, a $\bigcup_n f_n(D)$ halmaz, a jobb felsíkban helyezkedik el. Felhasználva az általános Montel tételt (a $\frac{1+z}{1-z}$ függvény segítségével elegendő lenne felhasználni a klasszikus Montel tételt, de ezzel a gondolatmenettel a bizonyítás nem lenne annyira "elegáns") kapjuk, hogy $(f_n)_n$ normális függvénycsalád.

Ez azt jelenti, hogy az $(f_n)_n$ minden részsorozata tartalmaz konvergens részsorozatot. Ha ki tudnánk mutatni, hogy ezek a konvergens részsorozatok ugyanahhoz a holomorf függvényhez tartanak, az azt jelentene, hogy $(f_n)_n$ konvergens sorozat. Feltételezzük ennek az ellenkezőjét. Legyen f_{n_i} és f_{m_i} az f_n két konvergens részsorozata, úgy hogy $f_{m_i} \to f^1$,$f_{n_i} \to f^2$, és $f^1 \neq f^2$. Mivel $\lim_{i\to\infty} f_{n_i}(z_0) = \lim_{i\to\infty} f_{m_i}(z_0) = c_0 \neq \infty$, a Hurwitz lemmát felhasználva kapjuk, hogy f^1 es f^2 holomorf függvények (nincs pólusuk).

A $u_1(z) \leq u_2(z) \leq u_3(z) \leq ...$ feltétel garantálja, hogy $\Re f_1(z) = \lim_i \Re f_{n_i}(z)$, $= \lim_i \Re f_{m_i}(z) = \Re f_2(z)\ \forall z \in D$. Mivel f_1 es f_2 valós része ugyanaz és imaginárius részük megegyezik egy pontban ($f_1(z_0) = f_2(z_0) = c_0$), kapjuk , hogy $f_1 = f_2$. Ezzel igazoltuk, hogy f_n konvergens sorozat es határértéke egy holomorf függvény. Ez egyben azt is jelenti, hogy u_n konvergens, az $\overline{u}$ határértéke pedig véges és harmonikus a D minden pontjában. □

3. Megjegyzés. *A fenti állításban, amelynek bizonyítása a normális függvénycsaládok nyelvezetét használta, a Harnack elvet csupán egyszeresen összefüggő tartományokra igazoltuk. Mivel a normalitás a meromorf függvénycsaládok lokális tulajdonsága, ezért a fenti állításból egyszerűen levezethető a Harnack elv tetszőleges tartományokra is.*

Megfigyelve a fenti bizonyítást észrevehető, hogy a lehetőségeinket nem használtuk ki teljesen. Az u_n sorozatra vonatkozó "monotonitási" feltételt alig használtuk és az általános Montel tételt is nagyon partikuláris esetben vettük igénybe. Mielőtt bizonyítanánk egy erősebb állítást, lássuk be a soron következő két segéderedményt. A következő eredmény felfogható mint normalitási kritérium is.

2. Lemma. *Legyen $(f_n)_n$ holomorf függvénysorozat a D tartományon és legyen $K \subset \mathbb{R}$ egy korlátos halmaz. Ha*

$$K \cap (\Re\ f_n(D))^c \neq \phi,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

akkor $(f_n)_n$ normális függvénycsalád. Másszóval, ha minden f_n valós része "elkerül" egy pontot K-ból , akkor $(f_n)_n$ normális függvénycsalád.

Bizonyítás. Mivel K korlátos, ezért létezik a $v > 0$ szám, amelyre $|x| < v,\ \forall x \in K$. Tudva, hogy minden $Re\ f_n$ "elkerül" egy x_n értéket K-ból, kapjuk, hogy az $f_n(D)$ halmaz vagy a $\{Re\ z > -v\}$ felsíkban, vagy a $\{Re\ z < v\}$ felsíkban helyezkedik el (mivel $f_n(D)$ összefüggő).

Legyen F_1 az f_n sorozat azon tagjainak a halmaza, amelyek képei az $\{Re\ z > -v\}$ felsíkban vannak, és F_2 pedig azoké amelyek képei a $\{Re\ z < v\}$ felsíkban vannak. Ez azt jelenti, hogy az $(f_n)_n$ tetszőleges részsorozatának végtelen sok különböző eleme van az F_1-ben vagy az F_2-ben. Az általános Montel tétel szerint úgy F_1 mint F_2 normális függvénycsalád, tehát $(f_n)_n$ is normális függvénycsalád. □

3. Lemma. *Legyen $K \subset \mathbb{R}$ egy korlátos halmaz, és $(u_n)_n$ egy harmonikus függvénysorozat a D egyszeresen összefüggő tartományon, amely teljesíti az alábbi két feltételt:*

1. $K \cap (u_n(D))^c \neq \phi,\ \forall n \in \mathbb{N}$
2. $\exists z_0 \in D$, *úgy hogy* $\lim_{n\to\infty} u_n(z_0) = +\infty$

Ekkor $\lim_{n\to\infty} u_n(z) = +\infty,\ \forall z \in D.$

Bizonyítás. Legyen $z_1 \in D$ egy tetszőleges pont. Mivel D egyszeresen összefüggő, ezért létezik az $f_n^{z_1} \in \mathcal{O}(D, \mathbb{C})$ holomorf függvénysorozat, amelyre $\Re\ f_n^{z_1} = u_n$ és $f_n^{z_1}(z_1) = u_n(z_1)$. Az előző lemma szerint kapjuk, hogy $(f_n^{z_1})_n$ normális család, vagyis minden részsorozatának van konvergens részsorozata.

Mivel $\Re\ f_n^{z_1} = u_n$ és $\lim_{n\to\infty} u_n(z_0) = +\infty$ kapjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} f_n^{z_1}(z_0) = \infty$. Legyen $f_{n_i}^{z_1}$ az $f_n^{z_1}$ egy konvergens részsorozata. Mivel $f_n^{z_1}$ holomorf függvénysorozat (nincsenek pólusai) ezért, felhasználva a meromorf függvényekre vonatkozó Hurwitz lemmát kapjuk, hogy $f_{n_i}^{z_1} \to_K \infty$.

Tudva, hogy $(f_n^{z_1})_n$ normális függvénycsalád (relatív kompakt), kapjuk, hogy $f_n^{z_1} \to_K \infty$, partikulárisan $\lim_{n\to\infty} f_n^{z_1}(z_1) = \lim_{n\to\infty} u_n(z_1) = \infty$. Mivel z_1 tetszőlegesen volt választva kapjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} u_n(z) = +\infty$, $\forall z \in D$. □

6. Tétel. *Legyen D egyszeresen összefüggő tartomány és $(u_n)_n$ egy harmonikus függvénysorozat D-n. Legyen $K \subset \mathbb{R}$ korlátos halmaz és γ egy zárt egyszerű görbeív D-ben, amelyre:*

1. $K \cap (u_n(D))^c \neq \phi$, $\forall n \in \mathbb{N}$
2. $\exists \lim_n u_n(\xi)$, *(lehet végtelen is)* $\forall \xi \in \gamma$

ekkor $\overline{u}(z) := \lim_{n\to\infty} u_n(z)$ véges és harmonikus a D minden pontjában vagy $\overline{u}(z) = \infty$, $\forall z \in D$.

Bizonyítás. Ha lenne olyan $\xi_0 \in \gamma$, amelyre $\lim_{n\to\infty} u_n(\xi_0) = \infty$, akkor az előbbi lemma alapján kapjuk, hogy $\overline{u}(z) = \infty$, $\forall z \in D$. Feltételezhetjük tehát, hogy $\lim_n u_n(\xi)$ véges, $\forall \xi \in \gamma$. Legyen $\xi_0 \in \gamma$, amelyre $\lim_n u_n(\xi_0) = c_0 \neq \infty$.

Amint azt korábban is tettük, értelmezzük az $f_n \in \mathcal{O}(D, \mathbb{C})$ sorozatot, amelyre $Re\ f_n = u_n$ és $f_n(\xi_0) = u_n(\xi_0)$. Az első lemmánk szerint $(f_n)_n$ normális függvénycsalád.

Ha kimutatjuk, hogy az f_n minden konvergens részsorozata ugyanahhoz a holomorf függvényhez tart, akkor készek is leszünk. Legyen $(f_{n_i})_i$ és $(f_{m_i})_i$ az $(f_n)_n$ két konvergens részsorozata, amelyek az f^0 és f^1 meromorf függvényekhez tartanak. Mivel $f^1(\xi_0) = f^0(\xi_0) = c_0 \neq \infty$, a Hurwitz lemmát felhasználva kapjuk, hogy f^1 és f^0 holomorf függvények (nincsenek pólusaik).

Mivel $\exists \lim_n u_n(\xi)$, $\forall \xi \in \gamma$ kapjuk, hogy $\Re\ f^0(\xi) = \Re\ f^1(\xi)$, $\forall \xi \in \gamma$, ami azt jelenti, hogy $|e^{f^0(\xi) - f^1(\xi)}| = 1$, $\forall \xi \in \gamma$. Legyen (γ) az résztartományára D-nek, amelyet a γ görbeív határol. Mivel az $e^{f_0 - f_1}$ függvénynek nincsenek zérushelyei D-ben, felhasználva a minimum és maximum modulusz elvet, azt kapjuk, hogy $|f_1(z)| = |f_0(z)|$ $\forall z \in (\gamma)$. Mivel (γ) nyílt halmaz, ezért $f_1(z) = f_2(z)$ $\forall z \in (\gamma)$. Ezzel készek is vagyunk. □

4. Megjegyzés. *A korábbi megjegyzésükben elhangzott gondolat, miszerint a D halmaz lehet tetszőleges tartomány, igaz a fenti általánosabb eredmény esetében is. Ebben az esetben viszont ahhoz, hogy az előző bizonyítás gondolatmenetet alkalmazzuk, plusz feltételként ki kell kötnünk, hogy γ homotóp nullával a D tartományban.*

7. Tétel. *Legyen $(u_n)_n$ egy harmonikus függvénysorozat a D tartományon. Legyen $K \subset \mathbb{R}$ korlátos es $\gamma \subset D$ egy zárt egyszerű görbeív amely homotóp nullával D-ben. Ha*

1. $K \cap (u_n(D))^c \neq \phi, \forall n \in \mathbb{N}$
2. $\exists \lim_n u_n(\xi)$, *(lehet végtelen is)* $\forall \xi \in \gamma$

akkor $\overline{u}(z) := \lim_{n\to\infty} u_n(z)$ *véges minden pontban és harmonikus vagy* $\overline{u}(z) = \infty$, $\forall z \in D$.

Bizonyítás. A bizonyítás csupán a technikai nehézségek leküzdésében jelenti. Az ötlet abból all, hogy megszerkesztünk minden $z_0 \in D$ pontra egy olyan D_{z_0} egyszeresen összefüggő tartományt amelyre $z_0 \in D_{z_0}$ és $\gamma \subset D_{z_0}$. Ha ezt megtettük, akkor alkalmazzuk az előbbi tételt a D_{z_0} tartományra.

Legyen (γ) az a tartomány, melynek a γ görbe a határvonala és legyen $\tau : [0,1] \to D$ egy olyan egyszerű görbeív amely összeköti a z_0 pontot a γ görbével, úgy hogy $\tau(0) = z_0$, $\tau(1) \in \gamma$ és $\tau([0,1)) \cap \gamma = \phi$. Mivel D nyílt, bármely $z \in \tau \cup \gamma$ pontra létezik egy $B_z \subset D$ z középpontú nyílt korong. Mivel a $\tau \cup \gamma$ kompakt halmaz, létezik a $B_{z^1}, B_{z^2} \ldots, B_{z^n}$ véges lefedés.

A D_{z_0} termesztés megválasztása a $B_{z^1} \cup B_{z^2} \cup \ldots \cup B_{z^n} \cup (\gamma)$ halmaz lenne. Sajnos ez a konstrukció nem garantálja a D_{z_0} egyszeresen összefüggőséget, mivel megjelenhetnek "lyukak" a B_{z^i} korongok között. Ahhoz, hogy ezeket a "lyukakat" felszabadítsuk, módosítunk keveset a fent mutatott konstrukcióban. Legyen $L := B_{z^1} \cup B_{z^2} \cup \ldots \cup B_{z^n} \cup (\gamma)$. L határvonala a B_{z^i} korongok határvonalainak részeiből tevődik össze, ezért az $L^c := \mathbb{C}_\infty \setminus L$ halmaznak csak véges számú komponense van. Az egyszerűség kedvéért növeljük a B_{z^i} korongok sugarát, hogy ne legyenek az L^c-ben olyan komponensek amelyek csak egy pontot tartalmaznak. Így induktíven megszerkeszthetjük a $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ egyszerű görbeíveket amelyek összekötik a L^c komponenseit és nem metszik sem egymást sem γ és τ görbéket. Legyen M az $L^c \cup \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \ldots \cup \gamma_k$ komplementárisa. A D_{z_0} halmazt az M azon komponensének választjuk, amely tartalmazza a γ es τ görbéket. Ezzel a konstrukcióval D_{z_0} egyértelműen egyszeresen összefüggő tartomány lesz.

Mivel a tétel feltételei igazak az $(u_n)_n$ sorozatra akkor is, ha a D tartomány helyett a D_{z_0}-val dolgozunk, az előző tételünket felhasználva kapjuk a tétel állítását minden D_{z_0} tartományra. Mivel z_0 tetszőlegesen volt választva, a bizonyítás teljes. $\square$

5. Megjegyzés. *A K halmaz korlátossága nem hagyható el, mint ahogyan azt az $u_n(z) = Re\ z^n$ példa mutatja. Legyen $D = \Delta(0,2)$, γ pedig legyen az origó középpontú $\frac{1}{2}$ sugarú kor. Ekkor $lim_{n\to\infty} u_n(\xi) = 0$, $\forall \xi \in \gamma$, de $\overline{u}$ egyértelműen sem nem harmonikus, sem nem ∞ a D minden pontjában.*

6. Megjegyzés. *Ha γ nem zárt, akkor a fenti állítás általában nem igaz, ahogy ezt a következő példából be is lehet látni. Legyen $u_{2n+1}(z) = (1 + \frac{1}{n+1}) log|z|$ es $u_{2n}(z) = 0$. Legyen $D = \{z : Re\ z > 0\} \setminus \overline{\Delta(0, e^{-1})}$, K legyen a $[-3,-2]$ intervallum es γ az egységsugarú kor az a része amely még D-ben van. Nyilvánvalóan $lim_{n\to\infty} u_n(\xi) = 0$, $\forall \xi \in \gamma$, mégis a $\overline{u}$ függvény meg csak nem is létezik.*

Hivatkozások

[1] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill (1970), pp. 228–229.

[2] L. Zalcman, *A Heuristic Principle in Complex Function Theory*, The American Mathematical Monthly, Vol. 82, No. 8 (1975), pp. 813–818.

[3] L. Zalcman, *Normal families: new perspectives*, Bulletin of the American Mathematical Society, Volume 35, No. 3 (1998), pp. 215–230.

[4] T. Gamelin, *Complex Analysis*, Springer (2000), pp. 318–319.