XI.Erdélyi Tudományos Diákköri Konferencia

2008. május 23-24

A monoton L'Hospital *Time Scale* analízisben

Farkas Csaba
BBTE, Matematika-Informatika kar
,Matematika-Informatika szak
II.év
Témavezető: dr.András Szilárd
Matematika-Informatika szak, Differeneciálegyenletek tanszék

A monoton L'Hospital *Time Scale*[1] analízisben

Farkas Csaba, BBTE Kolozsvár
2008. április

Ebben a cikkben a Monton L'Hospital tulajdonsagot vizsgáljuk Time Scale analízisben. Előbb a Time Scale analízis bevezetője majd a Monoton L'Hospital szabály olvasható.
Az Idő Skála analízis avagy a Time Scale analízist Stefan Hilger [2] vezette be a Phd tézisében. Előbb értelmezük az idö skálákat(Egy tetszőleges idő skálát $\mathbb{T}$ -vel jelölünk), majd megvizsgáljuk ezek egyszerű tulajdonságait, és végul az analízis alappilléreit épitjük fel. Mindezek után a Monoton L'Hospital[3] tulajdonságok vizsgáljuk.

1. A Time Scale analízis

Az idő skála analízist Stefan Hileger vezette be a doktori tézisében, a diszkrét és valós analízis egyesítéseként szolgál.

1. Értelmezés. *Idő skálának nevezzük a $\mathbb{R}$-nek zárt részhalmazait.*

Egy idő skálát $\mathbb{T}$-vel jelölünk. Bevezetjük az f^{Δ} deriváltakat $\mathbb{T}$-n.

2. Értelmezés. *Legyenek $\sigma, \rho, \mu : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ függvények. $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$,$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$,$\mu(t) = \sigma(t) - t$.Ezeket a függvényeket rendre jobb illetve balugrás operátornak nevezzük. A μ függvényt pedig ugrás operátornak nevezzük.*

3. Értelmezés. *(Pontok jellemzése) Legyen $t \in \mathbb{T}$. A t pontot*

1. *bal-sűrűnek nevezzük,ha $\rho(t) = t$,*
2. *bal-szétszortnak nevezzük ha $\rho(t) < t$,*
3. *jobb-sűrűnek nevezzük ha $\sigma(t) = t$,*
4. *jobb-szétszortnak nevezzük ha $\sigma(t) > t$.*

[1] Néhol Idő Skála
[2] Stefan Hilger
[3]

Értelmezzük a következő halmazt:

$$\mathbb{T}^{\mathcal{K}} = \begin{cases} \mathbb{T}, & \sup\mathbb{T}= \infty \\ \mathbb{T} \setminus (\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}], & \sup\mathbb{T}<\infty. \end{cases}$$

A továbbiakban értelmezzük a Higer vagy delta deriváltakat.A deriváltakat $\mathbb{T}^{\mathcal{K}}$ halmaz pontjain értelmezzük:

4. Értelmezés. *Legyen $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ függvény és $t \in \mathbb{T}^{\mathcal{K}}$. Ekkor $f^{\Delta}(t)$ az a szám, amelyre $\forall\varepsilon > 0$ esetén létezik egy $U \in \mathcal{V}(t)$(környezete t-nek, $U = (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$,egy tetszőleges $\delta > 0$ esetén.) úgy, hogy*

$$\Big|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^{\Delta}[\sigma(t) - s]\Big| \leqslant \varepsilon\big|\sigma(t) - s\big|, \forall s \in U.$$

Az $f^{\Delta} : \mathbb{T}^{\mathcal{K}} \to \mathbb{R}$ függvényt az f derivált függvényének nevezzük $\mathbb{T}^{\mathcal{K}}$-n.

1. Példa. *Legyen $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ függvény $f(t) = \alpha$ minden $t \in \mathbb{T}^{\mathcal{K}}$, ahol α konstans.Láthatjuk, hogy $f^{\Delta} \equiv 0$. Világos, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén $|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)| = |f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)| \leqslant \varepsilon|\sigma(t) - s|$.*

A továbbiakban vizsgáljuk a derivált néhány ismert tulajdonságát az idő skálán:

1. Tétel. *Legyen $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ differenciálhatók a $t \in \mathbb{T}^{\mathcal{K}}$ pontban. Akkor*

- *$f + g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ is differenciálható t-ben és $(f + g)^{\Delta} = f^{\Delta} + g^{\Delta}$*
- *Minde α konstans esetén αf is differenciálható a t-ben és $(\alpha f)^{\Delta} = \alpha f^{\Delta}$*
- *A szorzat függvény is diffrenciálható t-ben és $(fg)^{\Delta} = f^{\Delta}g + f(\sigma)g^{\Delta} = f(t)g^{\Delta} + f^{\Delta}g(\sigma)$*
- *Ha $f(t)\cdot f(\sigma(t)) \neq 0$, akkor $\frac{1}{f}$ is differenciálható t-ben és $\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = -\frac{f^{\Delta}}{f(t)f(\sigma(t))}$*
- *Ha $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g}$ is differenciálható t-ben és $\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta(t)}g(t)-f(t)g^{\Delta(t)}}{g(t)g(\sigma(t))}$*

Vezessük be a következő értelmezést:

5. Értelmezés. *Egy $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ függvényt js-folytonosnak mondunk ha folytonos a jobb sűrű pontokban és létezik baloldali határértéke(véges) a bal-sűrű pontokban. A js-folytonos függvények halmazát $C_{js} = C_{js}(\mathbb{T}) = C_{js}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$. Hasonlóan azon függvények halmazát amelyek C_{js}-ben vannak és a deriváltjuk is C_{js}-ben van C^1_{js}-el jelöljük.*

6. Értelmezés. *Az* $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *függvényt az* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *antideriváltjának nevezzük, ha* $F^{\Delta}(t) = f(t)$, $\forall t \in \mathbb{T}^{\mathcal{K}}$

2. Tétel. *(Létezési feltétel) Minden* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *js-folytonos függvénynek van antideriváltja*[4].

7. Értelmezés. *Legyen* $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *egy* $js - folytonos$ *függvény, amelynek primitívje* $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$. *Ekkor az* f *integrálján a következőt értjük:*

$$\int_r^s f(t)\Delta t = F(s) - F(r), \forall r, s \in \mathbb{T}.$$

Ezt az integrált nevezzük a delta-integrálnak.

3. Tétel. *(A delta-integrál tulajdonságai) Ha* $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *és* $f, g \in C_{js}$, *akkor*

- $\int_a^b [f(t) + g(t)]\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)dt;$
- $\int_a^b \alpha \cdot f(t)\Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t;$
- $\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t;$
- $\int_a^b f(t)\Delta t$[5] $= \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t;$
- $\int_a^b f(\sigma)g^{\Delta} = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta} g$
- $\int_a^b f(t)g^{\Delta} = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta} g(\sigma);$
- $\int_a^a f = 0;$
- *ha* $f(t) \geqslant 0$ *akkor* $\forall a \leqslant t < b$ *esetén* $\int_a^b f \geqslant 0;$
- *ha* $|f(t)| \leqslant g(t)$ *az* $[a, b)$*-n, akkor*

$$\Big| \int_a^b f \Big| \leqslant \int_a^b g$$

Egy érdekes és hasznos tétel a következő:

[4] Az antiderivált fogalma azonosítható a primitív fogalmával

[5] $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f$

4. Tétel. *Ha $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges függvény es $t \in \mathbb{T}$ egy tetszőleges pont, akkor*

$$\int_t^{\sigma(t)} f = \mu(t)f(t)$$

A továbbiakban ismert halmazokon vizsgáljuk meg, a bevezetett integrált.

5. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{T}$ és $f \in C_{js}$.*

1. *Ha $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, akkor $\int_a^b f = \int_a^b f(t)dt$*
2. *Ha [a,b] csak izollt pontokból áll akkor*

$$\int_a^b f = \begin{cases} \sum\limits_{t\in[a,b)} \mu(t)f(t), & a<b; \\ 0, & a=b; \\ -\sum\limits_{t\in[b,a)} \mu(t)f(t), & a>b. \end{cases}$$

3. *Ha $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$ akkor*

$$\int_a^b f = \begin{cases} \sum\limits_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh)h, & a<b; \\ 0, & a=b; \\ -\sum\limits_{k=\frac{b}{h}}^{\frac{a}{h}-1} f(kh)h & a>b. \end{cases}$$

4. *Ha $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, akkor*

$$\int_a^b f = \begin{cases} \sum\limits_{t=a}^{b-1} f(t), & a<b; \\ 0, & a=b; \\ -\sum\limits_{t=b}^{a-1} f(t), & a>b. \end{cases}$$

A továbbiakban bevezetjük még az exponenciális függvény fogalmát az idő skálán.

8. Értelmezés. *Azt mondjuk, a $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ függvényről, hogy regresszív, ha $1 + \mu(t)p(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{T}$ esetén. Ezen függvények halmazát,amelyek js-folytonosak $\mathcal{R}$-el jelöljük. Vezessük, be az $\mathcal{R}^+ = \{p \in \mathcal{R} : 1 + \mu(t)p(t) > 0, \forall t \in \mathbb{T}\}$ jelölést a pozitív $\mathcal{R}$-beli függvények halmazára.*

6. Tétel. *Legyen* $t_0 \in \mathbb{T}$. *És legyen p egy js-folytonos és regresszív függvény, akkor az*

$$y^{\Delta} = p(t)y, y(t_0) = 1,$$

egyenletnek egy megoldása van.

9. Értelmezés. *Egy* $h > 0$ *értelmezzük a Hilger féle komplex, illetve a Hilger féle valós számokat,a Hilger féle alternatív számokat, valamint a Hilger féle immaginárius számokat:*

$$\mathbb{C}_h = \{z \in \mathbb{C} : z \neq \frac{1}{h}\}$$

$$\mathbb{R}_h := \{z \in \mathbb{C}_h : z \in \mathbb{R}, z > -\frac{1}{h}\}$$

$$\mathbb{A}_h := \{z \in \mathbb{C}_h : z \in \mathbb{R}, z < -\frac{1}{h}\}$$

$$\mathbb{I}_h := \{z \in \mathbb{C}_h : |z + \frac{1}{h}| = \frac{1}{h}\}$$

Legyen $h > 0$. Ekkor értelmezzük a

$$\xi_h : \mathbb{C}_h \to \mathbb{Z}_h = \{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{h} < Im(z) < \frac{\pi}{h}\}, \xi_h(z) = \frac{1}{h}Log(1 + zh),$$

ahol Log a lograitmus főága. És h=0 esetén $\xi_0(z) = z, \forall z \in (C)$. Ezt a függvényt nevezzük cylinder féle transformációnak. Ezek alapján igaz a következő kijelentés:

7. Tétel. *Ha* $p \in \mathcal{R}$, *akkor* $e_p(t, s) = exp\{\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\}$.

Mielőtt vizsgálnánk az exponenciális függvény tulajdonságati,vezessük be a következő műveleteket:

10. Értelmezés. *Legyen* p, q *két regresszív függvény.Ekkor értelmezés szerint* $p \oplus q := p + q + \mu pq, \ominus p := -\frac{p}{1+\mu p}, p \ominus q := p \oplus (\ominus q)$

8. Tétel. *Legyenek* p, q *regresszív függvények akkor:*

1. $e_0(t, s) \equiv 1$ *és* $e_p(t, t) \equiv 1$
2. $e_{\sigma(t),s} = (1 + \mu(t)p(t))e_p(t, s)$
3. $\frac{1}{e_p(t,s)} = e_{\ominus p}(t, s)$
4. $e_p(t, s) = \frac{1}{e_p(s,t)} = e_{\ominus p}(s, t)$
5. $e_p(t, s) \cdot e_p(s, r) = e_p(t, r)$
6. $e_p(t, s) \cdot e_q(t, s) = e_{p \oplus q}(t, s)$
7. $\frac{e_p(t,s)}{e_q(t,s)} = e_{p \ominus q}(t, s)$

Az adott pillanatokban még megjegyezünk $TimeScale(Idskla) - bl$ tételeket,definicíókat.

2. Monoton L'Hospital

A monoton l'Hospital szabályt G.D. Anderson, M.K.Vamanamurthy és M. Vuorinen megfogalmaztak egy érdekes lemmát, amelyet azóta is számos dolgozatukban használnak, többek között a kvázikonformis analízisben. 2001.-ben I.Pinelis újra felfedezi ezt a lemmát és napjainkig használja a valószínűsés számításban, a hiperbolikus geometriában, infomráció elméletben stb.A témában nagyon sok érdekes cikk jelent meg. Az egyetemi tanulmányaink során ismerkedünk meg azzal a ténnyel, hogy ha egy f függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon és pozitív a deriváltja az (a, b) intervallumon, akkor f növekvő.Ez az eredmény könnyen belátható Lagrange tételének segítségével. A monoton L'Hospital törtek monotonitását vizsgáljuk meg. Tekintsük akkor a $Monoton L'Hospitalttelt$

9. Tétel. *Legyen* $-\infty < a < b < \infty$, *valamint legyenek* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonos függvények az* $[a, b]$ *intervallumon és differenciálhatók az* (a, b) *intervallumon, úgy, hogy* $f(a) = g(a) = 0$ *vagy* $f(b) = g(b) = 0$. *Tegyük fel, hogy* $g'(x) \neq 0$ *minden* $x \in (a, b)$ *esetén. Ha* $\frac{f'}{g'}$ *növekvő(csökkenő) akkor* $\frac{f}{g}$ *is hasonló monotonitású.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $g'(x) > 0$ minden $x \in (a, b)$ esetén, valamint az $\frac{f'}{g'}$ növekvő. Legyen x pillanatnyilag rögzített. Ekkor a Cauchy tétel alapján, létezik $y \in (a, x)$ úgy, hogy

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(y)}{g'(y)} \leqslant \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

. Ami alapján következik a kért kijelentés.

□

A továbbiakban tekintsünk még néhány eredményt illetve alakalmazását ennek a matematikai ágnak.

10. Tétel. *Legyen* f *és* g *differenciálható függvények, amelyekre* g' *sehol nem nulla egy* (a, b) *nyílt intervallumban az* $\mathbb{R}$*-n. Tegyük fel, hogy* $f(a+) = g(a+) = 0$ *vagy* $f(b-) = g(b-) = 0$.

(1) Ha a $\frac{f'}{g'}$ *növekvő az* $(a, b) - n$ *akkor* $\left(\frac{f}{g}\right)' > 0$ *az* $(a, b) - n$ *és* $\frac{f}{g}$ *növekvő az* $(a, b) - n$.

(2) Ha a $\frac{f'}{g'}$ *csökkenő az* $(a, b) - n$ *akkor* $\left(\frac{f}{g}\right)' < 0$ *az* $(a, b) - n$ *és* $\frac{f}{g}$ *csökkenő az* $(a, b) - n$.

Az egyeszerűség miatt vezessük be a következő jelöléseket

$$\zeta = \frac{f}{g}$$

$$\eta = \frac{f'}{g'}$$

1. Lemma. *Key Lemma A monotonitását a $\theta = g^2 \frac{r'}{|g'|}$ függvénynek az (a, b) intervallumon meghatározza az η monotonitása illetve a gg' előjele, a következő képpen:*
(1) *Ha $\eta \nearrow$ és $gg' > 0$ akkor $\theta \nearrow$*
(2) *Ha $\eta \nearrow$ és $gg' < 0$ akkor $\theta \searrow$*
(3) *Ha $\eta \searrow$ és $gg' > 0$ akkor $\theta \searrow$*
(4) *Ha $\eta \searrow$ és $gg' < 0$ akkor $\theta \nearrow$*

Bizonyítás: Legyen x és y pillanatnyilag fix, úgy, hogy

$$a < x < y < b$$

valamint értelmezzük a h függvényt a következő módon:

$$h(u) = h_y(u) = f'(y)g(u) - g'(y)f(u)$$

Minden $u \in (a, y)$ esetén

$$h'(u) = f'(u)g'(y) - g'(u)f'(y) = g'(u)g'(y)(\eta(y) - \eta(u)) > 0.$$

A fenti állítás azért igaz mert g nem veszi fel a nullát és elöjeltartó az adott intervallumon. Tehát az így értelmezett h függvényünk növekvő az (a, y) intervallumon. A folytonosság alapján h növekvő az $(a, y]$ intervallumon. A továbbiakban használjuk a következő azonosságot

$$(\theta(y) - \theta(x))|g'(y)| = (h(y) - h(x)) + (\eta(y) - \eta(x))g(x)g'(y).$$

Látható hogy, ez az azonosság alapján és a h függvény monotonitása (növekvő volta miatt) a lemma (1) pontját igazoltuk. Hasonlóan igazoljuk a többi részt is.

2. Példa. *Igazak a következö egyenlötlenségek:*
(1) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$
(2) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\tan x}{x} > 2 \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
Valóban ha tekintjük az első példánkat akkor egyenes kövekezménye a MLSZ[6]*-nak ha tekintjük a*

$$\frac{\sin x \cos^{-\frac{1}{3}} x}{x}$$

hányadost. A második példának az igazolását az olvasóra bízzuk.

[6]Monoton L'Hospital Szabály

3. Monoton L'Hospital Time Scale-n

Mielőtt elkezdenénk a MLSZ vizsgálatát idő skálákon vizsgáljuk meg a következő lemmát.

2. Lemma. *Legyen* $f : [a,b]_{\mathbb{T}}\ to\mathbb{R}$ *függvény amely differenciálható* $[a,b]_{\mathbb{T}}$ *idő skál intervallumon. Ha* $f^{\Delta} \geqslant$ *akkor* f *növekvő.*

Bizonyítás:

Egy általánosabb kijelentést fogunk igazolni, ami a Denjoy-Bourbaki nevét viseli.Ehez azonban bevezetjük az idő skálákon a matematikai indukció módszerét.

11. Értelmezés. *Legyen* $t_0 \in \mathbb{T}$ *valamint legyen* $\{S(t) : t \in [0,\infty)\}$ *olyan kijelentések halmaza amelyekre*
(i) Az $S(t_0)$ *kijelentés igaz.*
(ii) Ha $t \in [t_0,\infty)$ *egy jobb-szétszort pont és* $S(t)$ *igaz akkor* $S(\sigma(t))$ *is igaz.*
(iii) Ha $t \in [t_0,\infty)$ *és* $S(t)$ *igaz akkor létezik olyan környezete t-nek(U) amelyre* $S(s)$ *igaz minden* $s \in U \bigcap (t,\infty)$
(iv) Ha $t \in [t_0,\infty)$ *bal-sűrű pont és* $S(s)$ *igaz minden* $s \in [t_0,t)$ *esetén akkor* $S(t)$.
Ekkor $S(t)$ *igaz minden t-re.*

Ellenőrizzük, hogy ha a megadott kijelentések kielégítik az $(i) - (iv)$ feltételeket, akkor $S(t)$ igaz. Ezér vezessük be az

$$S^* = \{t \in [t_0,\infty) : S(t) nemigaz\}$$

. Igazolni, akarjuk, hogy $S^* =$. Ahoz, hogy ellentmondáshoz kerüljünk tegyük fel, hogy $S^* \neq$. Mivel S^* nem üres és zárt, ezért

$$inf S^* =: t^* \in \mathbb{T}.$$

Megvizsgáljuk $S(t^*)$ igazságértékét. Látható, hogy ha $t^* = t_0$ akkor $S(t^*)$ igaz az (i) alapján. Ha $t^* \neq t$ és $\rho(t^*) = t^*$ akkor $S(t^*)$ szintén igaz a (iv) alapján. Végül, ha $\rho(t^*) < t^*$, akkor $S(t^*)$ szintén igaz a (ii) alapján. Tehát minden esetben t^* nincs benne az S^*-ban.Tehát nem lehet t^* jobb-szétszórt pont, és $t^* \neq \max \mathbb{T}$,tehát t^* egy jobb-sűrű, de ekkor ellentmondásba kerülünk a (iii) alapján.

□

Térjünk ki a Denjoy-Bourbaki tétel igazolására, amely szerint ha f és g olyan függvények, amelyek az értékeiket a valós számok halmazából veszik, és pre-differenciálhatók(Azt a függvényt nevezzük pre-differenciálhatónak D halmazon, ha $D \subset \mathbb{T}^{\mathcal{K}}$, $\mathbb{T}^{\mathcal{K}} \setminus D$ megszámlálható és nem tartlamaz jobb-szétszórt pontokat, és f differenciálható D-n.) a D-n akkor az

$$|f^{\Delta}(t)| \leqslant g^{\Delta}, \forall t \in D$$

egyenlőtlenség magautánvonja

$$|f(s) - f(r)| \leqslant g(s) - g(r)$$

egyenlőtlenséget minden $r, s \in \mathbb{T}, r \leqslant s$. Legyen $r, s \in \mathbb{T}$ úgy, hogy $r \leqslant s$, valamint jelöljük $[r, s) \setminus D = \{t_n : n \in \mathbb{N}\}$. Legyen $\varepsilon > 0$. A továbbiakban a fennébb bevezetett indukció segítségével igazoljuk:

$$S(t) : |f(t) - f(r)| \leqslant g(t) - g(r) + \varepsilon\big(t - r + \sum_{t_n < t} 2^{-n}\big)$$

$t \in [r, s]$.A továbbikban ellenörizzük a fentebb bevezetett feltételek igazságát.
(i) Az $S(r)$ egyértelműen igaz.
(ii) Legyen t egy jobb-szétszórt pont és tegyük fel, hogy $S(t)$ teljesül. Ekkor $t \in D$ esetén

$$\begin{gathered}|f(\sigma(t)) - f(r) = |f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t) - f(r)| \leqslant \\ \leqslant \mu(t)|f^{\Delta}(t)| + |f(t) - f(r)| \leqslant \\ \leqslant \mu(t) g^{\Delta}(t) + g(t) - g(r) + \varepsilon\big(t - r + \sum_{t_n < t} 2^{-n}\big) = \\ = g(\sigma(t)) - g(r) + \varepsilon\big(t - r + \sum_{t_n < \sigma(t)} 2^{-n}\big) < \\ < g(\sigma(t)) - g(r) + \varepsilon\big(\sigma(t) - r + \sum_{t_n < \sigma(t)} 2^{-n}\big)\end{gathered}$$

Tehát $S(\sigma(t))$ is teljesül.
(iii) Tegyük fel, hogy $S(t)$ teljesül és $t \neq s$ egy jobb-sűrű pont, ami azt jelenti, hogy $\sigma(t) = t$. Tekintünk két esetet, névlegesen t nincs benne D-ben és $t \in D$. Elöször megvizsgáljuk, mikor $t \in D$. Akkor f és g differenciálhatók t-ben és létezik, olyan U környezete a t -nek, amelyre

$$|f(t) - f(\tau) - f^{\Delta}(t)(t - \tau)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}|t - \tau|, (\forall)\tau \in U$$

és

$$|g(t) - g(\tau) - g^{\Delta}(t)(t - \tau)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}|t - \tau|(\forall)\tau \in U$$

Tehát

$$|f(t) - f(\tau)| \leqslant \big[|f^{\Delta}(t) + \frac{\varepsilon}{2}|\big]|t - \tau|$$

és

$$g(t) - g(\tau) - g^{\Delta}(t)(\tau - t) \geqslant -\frac{\varepsilon}{2}|t - \tau|$$

Tehát $\tau \in U \bigcap (t, \infty)$

$$|f(\tau) - f(r)| \leqslant |f(\tau) - f(t)| + |f(t) - f(r)|$$

$\leqslant$

$$\Big[|f^{\Delta}(t)| + \frac{\varepsilon}{2}\Big]|t - \tau| + |f(t) - f(r)$$

$\leqslant$

$$\Big[g^{\Delta}(t) + \frac{\varepsilon}{2}\Big]|t - \tau| + g(t) - g(r) + \varepsilon\Big(t - r + \sum_{t_n < t} 2^{-n}\Big)$$

$=$

$$g^{\Delta}(t)(\tau - t) + \frac{\varepsilon}{2}(\tau - t) + g(t) - g(r) + \varepsilon(t - r) + \varepsilon \sum_{t_n < t} 2^{-n}$$

$\leqslant$

$$g(\tau) - g(t) + \frac{\varepsilon}{2}|t - \tau|\frac{\varepsilon}{2}(\tau - t) + g(t) - g(r) + \varepsilon(t - r) + \varepsilon \sum_{t_n < t} 2^{-n}$$

$=$

$$g(\tau) - g(r) + \varepsilon\big(\tau - r + \sum_{t_n < r} 2^{-n})\big)$$

Tehát $S(\tau)$ következik minden $\tau \in U \bigcap (t, \infty)$ esetén.
A második esetre tegyük fel, hogy D nem tartlamazza t-t.Ekkor $t = t_m$ valahány m re.Mivel f és g függvények predifferenciálhatók, ezért folytonosak is, ami azt jelenti, hogy létezik a olyan U környezete a t-nek amelyre

$$|f(\tau) - f(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}2^{-m}, \forall \tau \in U$$

és

$$|g(\tau) - g(t)|\frac{\varepsilon}{2}2^{-m} \forall \tau \in U.$$

A abszolútérték tulajdonsága alapján a második egyenlőtlenségből következik, hogy

$$g(\tau) - g(t) \geqslant -\frac{\varepsilon}{2}2^{-m}.$$

Ezen egyenlőtlenségeket figyelembe véve

$$|f(\tau) - f(r)| \leqslant ||f(\tau) - f(t)| + |f(t) - f(r)|$$

$\leqslant$

$$\frac{\varepsilon}{2}2^{-m} + g(t) - g(r) + \varepsilon\Big(t - r + \sum_{t_n < t} 2^{-n}\Big)$$

$\leqslant$

$$\frac{\varepsilon}{2}2^{-m} + g(\tau) + \frac{\varepsilon}{2}2^{-m} - g(r) + \varepsilon\Big(\tau - r + \sum_{t_n < t} 2^{-n}\Big)$$

$=$

$$\varepsilon 2^{-m} + g(\tau) - g(r) + \varepsilon\Big(\tau - r + \sum_{t_n<t} 2^{-n}\Big)$$

$\leqslant$

$$g(\tau) - g(r) + \varepsilon\Big(\tau - r + \sum_{t_n<r} 2^{-n}\Big).$$

Tehát ismét $S(\tau)$ igaz minden $\tau \in U \bigcap (t, \infty)$ esetén.
Az indukció alapján van még egy dolog amit le kell ellenörizzünk. Legyen t egy bal-sűrű pont, valamint tegyük fel, hogy $S(\tau)$ igaz minden $\tau < t$ esetén. Ekkor $\lim_{\tau \to t^-} |f(\tau) - f(r)| \leqslant \lim_{\tau \to t^-} \Big\{ g(\tau) - g(r) + \varepsilon\Big(\tau - r \sum_{t_n<r} 2^{-n}\Big)\Big\} \leqslant$

$$\lim_{\tau \to t^-} \Big\{ g(\tau) - g(r) + \varepsilon\Big(\tau - r + \sum_{t_n<t} 2^{-n}\Big)\Big\}$$

Ami alapján láthatjuk, hogy igaz amit igazolni akartunk. A matematikai indukció idő skálás verziója alapján igaz a Denjoy-Bourbaki féle tétel.

$\square$

1. Megjegyzés. *A fenti tétel egy fontos következménye a következő: Ha az f és g függvények predifferenciálhatók D-n akkor és $f^\Delta = g^\Delta \Rightarrow f(t) = g(t) + C$, valamint ha $f^\Delta \equiv 0 \Rightarrow f konstans.$*

Használjuk, továbbiakban is az $\zeta = \frac{f}{g}$, valamint az $\eta = \frac{f^\Delta}{g^\Delta}$ jelölést. Ezen jelölések mellett tekintsük a következő lemmát:

3. Lemma. *(Farkas Csaba) Ha f, g differenciálható függvények akkor teljesül a következő állítás*

$$g(t)g(\sigma(t))\zeta^\Delta(t) = (\eta(t) - \zeta(t))g(t)g^\Delta = \eta(t) - \zeta(\sigma(t))g(\sigma(t))g^\Delta.$$

Bizonyítás: Induljunk ki , a bizonyítandó egyenlőtlenség első részéből.
Tehát $g(t)g^\Delta(t)\Big(\frac{f(t)}{g(t)}\Big)^\Delta = f^\Delta(t)g(t) - f(t)g^\Delta(t)$. Viszont $(\eta(t) - \zeta(t))g(t)g^\Delta = f^\Delta(t)g(t) - f(t)g^\Delta(t)$. Tehát az első egyelőség teljesül. A deriválási szabályokat használva idő skálán ismeretes, hogy $(fg)^\Delta = f^\Delta g + f(\sigma)g^\Delta = fg^\Delta + g(\sigma)f^\Delta$. Ezekből az összefüggésekből kapjuk, hogy $(fg)^\Delta - f^\Delta g = f(\sigma)g$, valamint azt, hogy $(fg)^\Delta - g^\Delta f = g(\sigma)f$. Tehát $f(\sigma)g^\Delta - f^\Delta g = f^\Delta g - g^\Delta f$. Ahonnan következik, a bizonyítandó egyenlőtlenség.

$\square$

A következő tétel a MLSZ mutatja be Idő skála analízis körében.

11. Tétel. *(Farkas Csaba)*

1. *Ha η növekvő ($\nearrow$) valamint $g \cdot g^{\Delta} > 0$ akkor ζ csökkenő($\searrow$).*
2. *Ha η csökkenő ($\searrow$) valamint $g \cdot g^{\Delta} > 0$ akkor ζ növekvő ($\nearrow$).*
3. *Ha η növekvő ($\nearrow$) valamint $g \cdot g^{\Delta} < 0$ akkor ζ csökkenő($\searrow$).*
4. *Ha η csökkenő ($\searrow$) valamint $g \cdot g^{\Delta} < 0$ akkor ζ növekvő ($\nearrow$).*

Bizonyítás: A tétel első állítását fogkjuk igazolni, hiszen a többi rész is teljesen hasonlóan müködik.
Tehát legyen $\eta \nearrow$ és $g \cdot g^{\Delta} > 0$. Elégséges belátni, hogy létezik $k \in [a,b]_{\mathbb{T}}$, úgy, hogy $\zeta^{\Delta} \leqslant 0$ $t \in [a,k]_{\mathbb{T}}$-n és $\zeta^{\Delta} > 0$ $t \in [\sigma(k),b]_{\mathbb{T}}$-n (ebben az esetben azt mondjuk, hogy k egy jobb-szétszort illetve izolált pont mivel ezekre a pontokra teljesül, hogy $\sigma(t) > t$). Legyen a továbbiakban $k := \{t \in k \in [a,b]_{\mathbb{T}} \zeta^{\Delta} \leqslant 0\}$. Ebből következik, hogy $\zeta^{\Delta} > 0$ $k \in [\sigma(k),b]_{\mathbb{T}}$-n.Látható,hogy ha $\zeta^{\Delta}(k) \leqslant 0$ $k \in [a,k]_{\mathbb{T}}$ -n akkor a bizonyítással készen vagyunk. Ellenkező esetben tegyük fel, hogy létezik, olyan t az $k \in [a,k]_{\mathbb{T}}$ intervallumban, amelyre $\zeta^{\Delta}(t) > 0$. Világos, hogy létezhet több ilyen pont is amelyre ez az állítás igaz. Ezért jelöljük $\beta := \max\{t \in [a,b]_{\mathbb{T}} : \zeta^{\Delta}(t) > 0\}$. Láthatjuk, hogy ha $\beta \in [a,\rho(t)]_{\mathbb{T}}$. Most alkalmazzuk a lemmát. Megjegyezzük, hogy itt is több esetet kell megkülönböztetnünk.Mivel a β az lehet izolált, jobb- illetve bal sűrű pont,és lehet jobb- illetve bal- szétszort. És lehet sűrű.Megemlítjük, hogy a lemma alkamazható például, ha $\beta < \sigma(\beta)$ alkalmazzuk, a lemmát $t = \beta$ illetve $t = \sigma(\beta)$ esetére.Ezekből $\zeta^{\Delta}(\beta) > 0$ és $\zeta^{\Delta}(\sigma(\beta)) \leqslant 0$ következik, hogy $\eta(\beta) > \zeta(\beta) \geqslant \eta(\sigma(\beta))$. Ami látható, hogy ellentmondás mivel η növekvő függvény volt. Hasonlóan kapjuk az ellentmondást minden esetre.
Bizonyoa esetekben visszakapjuk a klasszikus MLSZ-t, ugyanis a valós számok halmazán $\sigma(t) = t$.

□

2. Megjegyzés. *Megjegyezzük, hogy a fenti tétel áthídalást nyújt a diszkrét estre is.Ha diszkrét esetet tekintünk abban az esetben minden pontra telejesül, hogy $\sigma(t) > t > \rho(t)$.*

Tekintsünk egy példát amivel bemutatjuk a MLSZ diszkrét esetben.
Legyen $p = (p_j : j \in \mathbb{Z})$ egy pozitív sorozat. A p sorozatot logaritmikusan konvexnek nevezzük az $\overline{a,b}$-n ha $q := \ln p$ konvex az $\overline{a,b}$-n, abban az értelemben, hogy Δq(Delta derivált diszkrét esetben) nem csökkenő az $\overline{a+1,b}$, ami azzal egyenértékű, hogy a $\frac{p_n}{p_{n+1}}$ nem növekvő $n \in \overline{a,b-1}$.Hasonlóan értelmezhető, a log-konkavitás is.

12. Tétel. *Tegyük, fel, hogy p egy logaritmikusan konvex sorozat vagy logaritmikusan konkáv sorozat az* $\overline{a,\infty}$*. Valamint legyen* $f_n := j = n\infty p_j < \infty$ *minden* $n \in \mathbb{Z}$*. Ekkor az* $f = \lim_{n\to\infty}$ *is log-konvex vagy log-konkáv. Sokkal általánosabb esetben ugyan azt a következtetést tudjuk megvizsgálni ha minden k természetes számra* $f = R^k p$*, ahol* $R^k p$ *a következő forlmula adja meg*

$$(R^k p)_n = \sum_{j=n}^{\infty} \binom{j-n+k-1}{j-n} p_j$$

Bizonyítás: Legyen $g_n := f_{n+1}$ minden $n \in \mathbb{Z}$.Az első része a tételnek egyenes következménye a LMSZ tételnek az idő skálán, csak meg kell jegyeznünk a következőket: $b = \infty$ $f_\infty := \lim_{n\to\infty} f_n = 0, g_\infty = 0$. Ekkor η nem csökkenő vagy nem növekvő vagy növekvő vagy csökkenő akkor ζ is ugyanúgy viselkedik. Ez az általánosabb eset abból a tényből következik, hogy

$$g_n g_{n-1} \Delta\zeta_n = \sum_{j=n}^{\infty} \Delta g_n \Delta g_j (\eta_j - \eta_n) \forall n \in \overline{a+1,\infty}.$$

Tovább alkalamazódik a LMSZ tétel. A második eset is könnyen igazolódik.

□

Hasonló jellegű tételt jegyezünk meg bizonyítás nélkül:

13. Tétel. *Tegyük fel, hogy p sorozar egy log-konvex vagy log-konkáv sorozat* $\overline{0,\infty}$ *és* $f_n = \sum_{j=0}^{n} p_j$ *minden* $n \in \overline{0,\infty}$*. Ekkor f log-konvex vagy log-konkáv. Jóval általánosabb módon ugyan olyan következtetést tudunk levonni, ha* $f = L^k p$*, ahol* $L^k p$ *a következő képlet adja meg:*

$$(L^k p)_n = \sum_{j=n}^{\infty} \binom{n-j+k-1}{n-j} p_j$$

A továbbikban megadunk még egy alkamazást, ez az alkalmazás technikai: Legyen $f := f^{(\alpha)}$ és legyen g az $\overline{0,\infty}$ ahol, $f_n^{(\alpha)} := \alpha + \sum_{j=0}^{n} p_j$ és $g_n := \sum_{j=0}^{n} q_j$ minden $\alpha \geqslant 0$ és $n \in \overline{0,\infty}$, ahol ahol p, q pozitív sorozatok úgy, hogy $\zeta = \frac{p}{q}$ növekvő legyen az $\overline{1,\infty}$ és $r_0^{(0)} < r_1^{(0)}$, ahol $r^{(\alpha)} := \frac{f^{(\alpha)}}{q}$(Például $p_j = j!$ és $q_j = (j/e)^j$ minden $j \in \overline{0,\infty}$,feltételezve, hogy $0^0 = 1$).Ekkor a LMSZ tétel alapján az $r^{(0)}$ növekvő az egész $\overline{0,\infty}$. Mitöbb minden $\alpha > 0$ esetén létezik, $k_\alpha \in \overline{0,\infty} \bigcup \{\infty\}$ úgy, hogy $r^{(\alpha)}$ csökkenő a $\overline{0,k_\alpha}$ és növekvő a $\overline{k_\alpha + 1, \infty}$-n.Diszkrét esetben a kulcselemma

$$g_n g_{n-1} \Delta\zeta = (\eta_n - \zeta_n) g_n \Delta g_n = (\eta_n - \zeta_{n-1} g_{n-1} \Delta g_n)$$

. Észrevettük, hogy $r^{(0)}$ növekvő az $\overline{0,\infty}$ amiből következik, hogy $\Delta r^{(0)} > 0$ és az előbbi lemma alapján $\eta > r^{(0)}$ az $\overline{1,\infty}$. Másrészt $r^{(\alpha)} = r^{(0)} + \alpha/g$. Tehát minden $k \in \overline{1,\infty}$ az $\alpha_k := (\eta_k - r_k^{(0)}) g_k$ pozitív és teljesíti a következő egyenletet $\eta_k = r_k^{(\alpha_k)}$ úgy, hogy az lemma alakján $(\Delta r^{(\alpha_k)})_k = 0$, ez $r_k^{(\alpha_k)} = r_{k-1}^{(\alpha_k)}$. Alkalmazzuk, ismét a LMSZ tételt és annak megjegyzett következményét láthatjuk, hogy $r^{(\alpha_k)}$ csökkenő az $\overline{0,k-1}$, konstans a $\{k-1,k\}$-n és növekvő a $\overline{k,\infty}$-n. Másfelől, tekintve ismét a lemmát diszkrét esetre észrevehető, hogy

$$r_k^{(\alpha)} \geqslant r_{k-1}^{(\alpha)} \Leftrightarrow \eta_k \geqslant r_k^{(\alpha)} \Leftrightarrow \alpha \leqslant \alpha_k,$$

minden $\alpha > 0$ esetben, és akkor igazak az ekvivalenciák az egyenlőtlenségeket kicseréljük szigorúakra.Partikulárisan $\alpha \leqslant \alpha_k \Rightarrow r_k^{(\alpha)} \geqslant r_{k-1}^{(\alpha)} \Rightarrow r_{k+1}^{(\alpha)} > r_k^{(\alpha)} \Rightarrow \alpha < \alpha_{k+1}$. A másadk implikáció következik a LMSZ tétel következményéből. Mivelhogy α_k növekvő k-ban. Mitöbb, ha $\alpha \in (\alpha_k, \alpha_{k+1})$ akkor $r^{(\alpha)_{k-1}} > r_k^{(\alpha)} < r_{k+1}^{(\alpha)}$, úgy, hogy $r_n^{(\alpha)}$ csökkenő $n \in \overline{1,k}$ és növekvő $n \in \overline{k,\infty}$, figyelembe véve, hogy k felvett minden természetes értéket. Annak érdekében, hogy lássuk, a fenti példa(alkalmazás) gondolatmenetét tekintsük egy tartályt amelyben valamilyen folyadék és víz található. Az $n = 0$ idő pillanatban a folyadék és a víz mennyisége $f_0^\alpha = \alpha + p_0$ valamint $g_0 = q_0$, illetve a kezdeti relatív koncetráció a folyadéknak(a vízre nézve) $r_0^{(\alpha)} = (\alpha + p_0)/q_0$.Tegyük fel, hogy minden n időpillanatban a folyadékot és vizet adunk a tartályhoz a következő mennyiségben$\Delta f_n = p_n$ és $\Delta g_n = q_n$, úgy, hogy a relatív koncetráció az n-edik idő pillanatban $\eta = p_n/q_n$, és a tartályban n. pillanatban $r_n^{(\alpha)}$. Ha α elég nagy a kezdeti relatív koncentráció η annak folyadéknak amelyhez hozzádunk még a későbbiekben kisebb mint a relatív koncetrációja annak a folyadéknak ami a tarályban van.Mindamellett legalább abban az esetben mikor η növekedik a ∞ felé meghaladja az $r^{(\alpha)}$-t, és utánna mindig növekvő marad.

További alkalmazásokat adhatunk még idő skálán a MLSZ-ra. Egyik ilyen példa az egyenlőtlenségek vizsgálata.

Az idő skála analízisben nagyon sok megoldatlan kérdés található.Egyik ilyen nagyon fontos probléma a logaritmus függvény megszerkesztése. Gondoljunk csak bele mennyire fontos lenne a diszkrét logaritmus megtalálása.Természetesen ezt különböző halmazok struktúrák felett vizsgálhatjuk. Nagyon hasnzos a kriptográfiában. A továbbikban egy irányt mutatunk ennek a probléma megoldására.
Tekintsük az Euler-Cauchy differenciálegyenletet

$$t^2y" - 3ty' + 4y = 0$$

. Ennek a megoldásai $y_1(t) = t^2$ és $y_2(t) = t^2 \ln t$. Ennek az egyenletnek a idő skála beli változata

$$t\sigma(t)y^{\Delta\Delta} - 3ty^{\Delta} + 4y =$$

. Ennek a megoldásai $y_1(t) = e_{2/t}(t, t_0)$,$y_2 = e_{t,t_0} \int_{t_0}^{t} \frac{\Delta\tau}{\tau+2\mu(\tau)}$.A megodlásokat ha megfeleltetjük, akkor a második megoldásban az integrál lesz a logaritmus.

Hivatkozások

[1] I.Pinelis L'Hospital type rules for monotonicity with application, J.Inequal Pure Appl. Math 2 (2002) article 33.24 pp (electronic)

[2] András Szilárd, Muresean Marian: Bevezetés a matematikai analízisbe

[3] Toth János, Simon Péter Differenciálegyenletek.Bevezetés az elméletbe és alkalmazásokba, TypoTEX, Budapest 2004.

[4] M.Bhoner Allan Peterson Dynamic Equation On Time Scales An introduction with Application Birkhäuser 2001

[5] Ravi p.Agraval Martin Bohner Wan-Tong Li: Nonsoscillation and Oscillation: THeory for Fnctional Differencial Equations, Pure an Appl. Math, 2004

[6] G. Anderson,M.Vamanamurthy, M.Vuorinen: Monotonicity Rules in Calculus TO appar in Amm. Math. Monthly (electronic)

[7] Ravi P. Agrawal, M.Bohner, Donald O'Regan: Time Scale on infinite Intervals, Nonlinear Analysis 2001(electronic)