XII. ERDÉLYI TUDOMÁNYOS DIÁKKÖRI KONFERENCIA
2009. MÁJUS 15.-17.
KOLOZSVÁR

Dolgozat címe:

A Kakeya problémakör

Témavezető:
Conf.dr. Soós Anna
Babeş-Bolyai Tudományegyetem
dr.Keleti Tamás Eötvös Lóránd Tudományegyetem
Analízis Tanszék

Szerző:
Farkas Csaba

2009

Zsuzsa mama emlékére ajánlom

Tartalomjegyzék

1. Bevezető **0**
1.1. A sűrűségi tétel 2
1.2. Frostman-lemma 4
1.3. A 7. tétel bizonyítása 9

2. A Kakeya feladaról **11**
2.1. Rövid történeti áttekintés 11

3. Dimenzió becslések **13**
3.1. Jelölések 13
3.2. Minkowski dimenzió becslés 14
3.3. Hausdorff dimenzió becslés 17

4. Kapcsolatok más matematikai ágakkal **23**

Kakeya Problémakör

Farkas Csaba
Babeş Bolyai Tudományegytem, Matematika Informatika kar Kolozsvár
(e-mail: farkas.csaba2008@gmail.com)

(*Received 2009*)

Kivonat. A dolgozatban a Kakeya sejtést, és a hozzá kapcsolodó problémakört mutatjuk be. Ez a problémakör a geometriai mértékelmélethez kapcsolódik szorosan. Kakeya vagy Besicovitch halmaznak nevezzük részhalmazát$\mathbb{R}^n$ (bizonyos esetben kompakt részhalmazt is vehetünk) amely minden irányban tartalmaz egység hosszú szakaszt. A mai napon a legismertebb Kakeya sejtés , hogy minden Kakeya halmaz Hausdorff és Minkowski dimenziója szügségképpen n. A kérdés (természetes variánsaival együtt) már önmagában is nagyon érdekes, de jelentősége messze túlmutat a geometriai mértékelméleten. Néhány eddigi eredményt szeretnék élesíteni. A harmadik részben néhány irányt mutatunk be, amelyek nagy jelentőséggel bírnak a további kutatások szempontjából.

1. Bevezető

A továbbiakban jelentsen μ és ν lokális Borel mértéket $\mathbb{R}^n$-ben, vagy egy metrikus téren, amely egy olyan külső mérték, hogy minden gömbnek véges a mértéke, és minden Borel halmaz mérhető. A μ tartója

$$spt\mu\{x \in \mathbb{R} : \mu(B(x,r)) > 0 \forall r > 0\},$$

ahol $B(x,r)$ egy zárt x középpontú és r sugarú gömb. Legyen egy $A \in \mathbb{R}^n$ halmazra

$$\mathcal{M}(A) = \{\mu : spt\mu \subset A, spt\mu \text{ kompakt } , 0 < \mu(A) < \infty\}$$

$$\mathcal{M}_1(A) = \{\mu \in \mathcal{M}(A) : \mu(A) = 1\}.$$

A Lebesgue mértéket jelölje $\mathbb{R}^n$-ben λ_n. Egy $0 \leq s \leq n$ esetén $\mathcal{H}^s$-val jelöljük az s-dimenziós Hausdorff mértéket, amit az alábbi módon értelmezünk:

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{diam}(E_i)^s : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \mathrm{diam}(E_i) < \delta \right\}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\mathcal{H}^s(A) < \infty,\ s < t, \Rightarrow \mathcal{H}^t(A) = 0.$$

A Hausdorff-dimenzióját egy A halmaznak a következő képpen értelmezzük

$$dimA = \sup\{s : \mathcal{H}^s(A) = \infty\} = \inf\{s : \mathcal{H}^s(A) = 0\}.$$

Egy kalsszikus eredmény 1930-ból, amit a Frostman-lemmának hívunk, kimondja, hogy egy Borel $A \subset \mathbb{R}^n$ halmazra, $\mathcal{H}^s(A) > 0$ akkor és csak akkor ha létezik egy $\mu \in \mathcal{M}(A)$ úgy, hogy

$$\mu(B(x, r)) < r^s \text{ ahol } x \in \mathbb{R}^n \text{ és } r > 0 \tag{1}$$

Annak az igazolása, hogy a létezés magautánvonja, hogy a Hausdorff mérték pozitív, nagyon egyszerű. A fordított implikáció jóval nehezebb.

Legyen most $A \subset \mathbb{R}^n$. Egy $0 < \varepsilon < \infty$ számra legyen $N(A, \varepsilon)$ a következő módon értelmezve:

$$N(A, \varepsilon) = \min \left\{ k : A \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \varepsilon) \text{ valamilyen } x_i \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Ekkor az felső illetve alsó Minkowski dimenzióját A-nak a következőképen értelmezzük:

$$\overline{\mathrm{dim}}_M A = \inf\{s : \limsup_{\varepsilon \to 0} N(A, \varepsilon)\varepsilon^s = 0\}$$

$$\underline{\mathrm{dim}}_M A = \inf\{s : \liminf_{\varepsilon \to 0} N(A, \varepsilon)\varepsilon^s = 0\}$$

A definiciók alapján nyilvánvaló, hogy

$$\mathrm{dim} A \leq \underline{\mathrm{dim}}_M A \leq \overline{\mathrm{dim}}_M A \leq n$$

A továbbiakban adunk egy általános módszert annak az igazolására, hogy Hausdorff mérték pozitiviását, hogy igazoljuk.

TÉTEL 1.1. *Legyen θ Borel mérték az (X, d) metrikus téren, és tegyük fel, hogy $\theta(B) \leq c \cdot (diamB)^s$ minden B Borel halmazra, ahol s és c pozitív konstansok. Ekkor $\mathcal{H}^s(H) \geq \overline{\theta}(H)/c$ minden $H \subset X$ halmazra.*

BIZONYÍTÁS. Ha $H \subset \cup_{n=1}^{\infty}$ zárt halmazokkal való tetszőleges lefedés, akkor

$$\overline{\theta}(H) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \theta(H_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{diam} H_n)^s.$$

Mivel ez minden (zárt halmazokkal való) lefedésre igaz, ezért $\mathcal{H}^s_\delta(H) \geq \overline{\theta}(H)/c$ minden $\delta > 0$-ra, és így $\mathcal{H}^s(H) \geq \overline{\theta}(H)/c$. □

A fenti tétel szerint, ha találunk egy θ Borel mértéket, amelyre $\theta(H) > 0$ és $\theta(B) \leq c \cdot (\mathrm{diam} B)^s$, minden B Borel halmazra, akkor $\mathcal{H}^s(H) > 0$. A következőkben az egyik célunk ennek az állításnak a megfordítása lesz (legalábbis $\mathbb{R}^p$-ben). Megmutatjuk, hogy ha $H \subset \mathbb{R}^p$ Borel halmazra $\mathcal{H}^s(H) > 0$, akkor van egy fenti tulajdonságú θ Borel mérték; sőt, θ választható $\mathcal{H}^s$ megszorításának H egy alkalmaz kompakt részhalmazára.

1.1. A sűrűségi tétel.

Az 1.Tétel alábbi variánsa gyakran alkalmazható.

TÉTEL 1.2. *Legyen θ Borel mérték az (X, d) metrikus téren, és legyen $s, c > 0$. Ha $H \subset X$ és*

$$\limsup_{r \to 0+0} \frac{\theta(\overline{B}(x, r))}{r^s} < c \tag{2}$$

minden $x \in H$-ra, akkor $\mathcal{H}^s(H) \geq \overline{\theta}(H)/c$.

BIZONYÍTÁS. Legyen $H_n = \left\{x \in H : \theta(\overline{B}(x, r)) < c \cdot r^s (0 < r \leq 1/n)\right\}$. Ekkor $H_1 \subset H_2 \subset ...$ és $\cup_{n=1}^{\infty} H_n = H$. Rögzített n-re legyen $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ a H_n halmaz egy lefedése legfeljebb $1/n$ átmérőjű halmazokkal. Ha A_i átmérője r_i és $x_i \in H_n \cap A_i$, akkor $A_i \subset \overline{B}(x_i, r_i)$, amiből

$$\overline{\theta}(H_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\theta}(A_i) \leq = 1 \sum_{n=1}^{\infty} \theta(\overline{B}(x_i, r_i)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot r_i^s = \sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{diam} A_i)^s.$$

Mivel ez a H_n halmaz minden, legfeljebb $1/n$ átmérőjű halmazokkal való lefedésére igaz, ezért

$$\overline{\theta}(H_n) \leq c \cdot \mathcal{H}^s_{1/n}(H_n) \leq c\mathcal{H}^s(H_n).$$

Itt n-nel végtelenbe tartva és felhasználva, hogy $\mathcal{H}^s$ és $\overline{\theta}$ reguláris külső mérték, azt kapjuk, hogy $\mathcal{H}^s(H) \geq \theta(H)/c$. □

A 2. Tétel dualitása a következő.

TÉTEL 1.3. *Legyen θ Borel mérték az (X,d) metrikus téren, és legyen $s, c > 0$. Ha $H \subset X$ és*

$$\limsup_{r\to 0+0} \frac{\theta(\overline{B}(x,r))}{r^s} > c \tag{3}$$

minden $x \in H$-ra, akkor $\mathcal{H}^s(H) \le 2^s \theta(H)/c$.

BIZONYÍTÁS. Legyen $\delta > 0$ adott. Azok a $\overline{B}(x,r)$ zárt gömbök , amelyekre $r < \delta/2$ és $\theta(\overline{B}(x,r)) > c \cdot r^s$, a Halmaz vagy Vitali-fedését alkotják. Így kiválaszthatunk közülük egy diszjunkt $\overline{B}(x_n,r_n)$ sorozatot úgy, hogy vagy $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^s = \infty$, vagy pedig $\mathcal{H}^s(H \setminus B) = 0$, ahol $B = \cup_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n,r_n)$. Az első esetben

$$\theta(X) \ge \sum_{n=1}^{\infty} \theta(\overline{B}(x_n,r_n)) \ge c \sum_{n=1}^{\infty} r_n^s = \infty,$$

és ekkor a tétel állítása nyilvánvaló. A második esetben

$$\mathcal{H}^s_\delta(H) \le \mathcal{H}^s_\delta(H \setminus B) + \mathcal{H}^s_\delta(B) \le$$
$$\le 0 + \sum_{n=1}^{\infty} (2r_n)^s \le (2^s/c) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \theta(\overline{B}(x_n,r_n)) \le$$
$$(2^s/c) \cdot \theta(X).$$

Mivel ez minden δ-ra igaz, így $\mathcal{H}^s(H) \le 2^s \cdot \theta(X)/c$. □

TÉTEL 1.4. *Ha $H \subset X$ és $\mathcal{H}^s < \infty$, akkor*

$$1 \le \limsup_{r\to 0+0} \frac{\mathcal{H}^s(H \cap \overline{B}(x,r))}{r^s} \le 2^s \tag{4}$$

$\mathcal{H}^s$-majdnem minden $x \in H$-ra.

BIZONYÍTÁS. Mivel $\mathcal{H}^s$ Borel reguláris, feltehetjük, hogy H Borel. Adott $\varepsilon > 0$-ra legyen $A_\varepsilon = \{x \in H : \limsup < 1-\varepsilon\}$. Alkalmazzuk a 2. Tételt a $\theta(B) = \mathcal{H}^s(H \cap B)$ $(B \subset X$ Borel $)$ választással. Azt kapjuk, hogy $\mathcal{H}^s(A_\varepsilon) \ge \mathcal{H}^s(A_\varepsilon)/(1-\varepsilon)$, tehát $\mathcal{H}^s(A_\varepsilon) = 0$. Ebből világos, hogy (3) első egyenlőtlensége teljesül $\mathcal{H}^s$-m.m. $x \in H$-ra. A második egyenlőtlenség igazolásához megismételjük a 3. Tétel bizonyításának gondolatmenetét. Legyen $\delta > 0$ és $\varepsilon > 0$ adott, és legyen $D_\varepsilon = \{x \in H : \limsup > 2^s(1+\varepsilon)\}$. Azok a $\overline{B}(x,r)$ zárt gömbök, amelyekre $r < \delta/2$ és $\mathcal{H}^s(H \cap \overline{B}(x,r)) > 2^s(1+\varepsilon) \cdot r^s$ teljesül, a D_ε halmaz egy Vitali-fedését alkotják. Így kiválaszthatunk közülük egy diszjunkt $\overline{B}(x_n,r_n)$ sorozatot úgy, hogy vagy $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^s = \infty$ vagy pedig $\mathcal{H}^s(D_\varepsilon \setminus B) = 0$, ahol $B = \cap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n,r_n)$. Az első eset lehetetlen, hiszen

$$2^s(1+\varepsilon) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} r_n^s \le \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(H \cap \overline{B}(x_n,r_n)) \le \mathcal{H}^s(H) < \infty$$

Így

$$\mathcal{H}^s_\delta(H) \le \mathcal{H}^s_\delta(H \setminus B) + \mathcal{H}^s_\delta(H \cap B) \le$$

$$\le \mathcal{H}^s(H \setminus B) + \sum_{n=1}^{\infty} (2r_n)^s \le$$

$$\le \mathcal{H}^s(H \setminus B) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^s}{2^s(1+\varepsilon)} \cdot \mathcal{H}^s(H \cap \overline{B}(x_n, r_n)) =$$

$$= [\mathcal{H}^s(H) - \mathcal{H}^s(H \cap B)] + \frac{1}{1+\varepsilon}\mathcal{H}^s(H \cap B) =$$

$$\mathcal{H}^s(H) - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\mathcal{H}^s(H \cap B) \le$$

$$\mathcal{H}^s(H) - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\mathcal{H}^s(D_\varepsilon).$$

Itt δ-val nullához tartva azt kapjuk, hogy $\mathcal{H}^s(H) \le \mathcal{H}^s(H) - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\mathcal{H}^s(D_\varepsilon)$, tehát $\mathcal{H}^s(D_\varepsilon) = 0$. Ebből világos, hogy (3) második egyenlőtlensége is teljesül $\mathcal{H}^s$-m.m. $x \in H$-ra. □

1.2. Frostman-lemma.

TÉTEL 1.5. *Legyen $H \subset X$ olyan Borel halmaz, amelyre $0 < \mathcal{H}^s < \infty$. Ekkor létezik egy θ Borel mérték X-en úgy, hogy $\theta(H) > 0$ és*

$$\theta(B) \le (\mathrm{diam} B)^s \tag{5}$$

minden B Borel halmazra, ahol $c > 0$ konstans.

BIZONYÍTÁS. Legyen

$$H_n = \left\{x \in H : \mathcal{H}^s(H \cap \overline{B}(x, r)) < (2^s + 1) \cdot r^s (0 < r \le 1/n)\right\}.$$

Mivel $\cup_{n=1}^{\infty} H_n$ a H halmaz $\mathcal{H}^s$-m.m pontját lefedi, van olyan n, amelyre $\mathcal{H}^s(H_n) > 0$. Legyen $\theta(B) = \mathcal{H}^s(B \cap H \cap \overline{H_n})$ minden B Borel halmazra. Ekkor θ olyan Borel mérték, amelyre $\theta(H) \ge \mathcal{H}^s(H_n) > 0$. Belátjuk, hogy (4) teljesül minden Borel halmazra., ahol $c = \max\left((2^s + 1) \cdot 2^s, (2n)^s \mathcal{H}^s(H)\right)$. Nyilván feltehetjük, hogy $0 < \mathrm{diam} B < \infty$ és $B \cap \overline{H_n} =\neq \emptyset$. Ha $\mathrm{diam} B = r < 1/2n$, akkor válasszunk egy $x \in H_n$ pontot, amelyre $\mathrm{dist}(x, B) < r$. Ekkor $B \subset \overline{B}(x, 2r)$ és így $2r < 1/n$ és $x \in H_n$ miatt

$$\theta(B) leq \theta(\overline{B}(x, 2r)) \le \mathcal{H}^s(H \cap \overline{B}(x, 2r)) < (2^s + 1) \cdot 2^s \cdot r^s \le c \cdot (\mathrm{diam} B)^s.$$

Ha viszont diam$B > 1/2n$, akkor

$$\theta(B) \leq \mathcal{H}^s(H) = [(2n)^s \mathcal{H}^s(H)] 1/(2n)^s \leq c \cdot (\text{diam}B)^s.$$

□

A továbbiakban célunk annak a bizonyítása, hogy - legalábbis $\mathbb{R}^p$-ben - az 5.Tétel állítása minden Borel halmazra igaz, amelynek Hausdorff-mértéke pozitív. Az alábbi tétel fogjuk belátni.

Tétel 1.6. *Egy $H \subset \mathbb{R}^p$ Borel halmazra akkor és csak akkor teljesül $\mathcal{H}^s(H) > 0$, ha létezik egy θ Borel mérték $\mathbb{R}^p$-n úgy, hogy $\theta(H) > 0$ és $\theta(H) \leq c \cdot (\text{diam}B)^s$ minden B Borel halmazra, ahol c egy pozitív konstans.*

Az 1.Tétel és az 5.Tétel birtokában ehhez nyilván elég a következő tételt bizonyítani.

Tétel 1.7. *Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ olyan Borel halmaz amelyre $\mathcal{H}^s(H) > 0$. Ekkor létezik egy $K \subset H$ kompakt halmaz, amelyre $0 < \mathcal{H}^s(H) < \infty$.*

A fenti tétel állítása - szemben az 1-5. Tételekkel - már nem igaz minden metrikus térben. Két példát mutatunk.

Ha az (X, d) metrikus tér nem szeparábilis. akkor van olyan Y nemmegszámlálható részhalmaza úgy, hogy Y bármely két pontjának a távolsága nagyobb mint egy rögzített $\delta > 0$. Ekkor Y zárt, és Y-t nem lehet lefedni megszámlálhatóan sok legfeljebb δ átmérőjű halmazzal, tehát $\mathcal{H}^s(Y) = \mathcal{H}^s_\delta(Y) = \infty$ minden $s > 0$-ra. Ugyanez érvényes Y minden nem-megszámlálható részhalmazára is. A megszámlálható részhalmazok mértéke nulla, tehát Y-nak nincs pozitív véges mértékű részhalmaza.

A második példához feltesszük a kontinuum-hipotézist. Legyen $\{U_\alpha : a < \omega_1\}$ a síkbeli véges lineáris mértékű G_δ-k egy felsorolása. Ekkor $\lambda^2 \left(\bigcup_{\beta<\alpha U_\beta}\right) = 0$, tehát választhatunk egy $x_\alpha \in \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta$ pontot minden $\alpha < \omega_1$-re. Ekkor $X = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ olyan halmaz, amelyre $\mathcal{H}^1(X) = \infty$(mert X-et egyik U_α sem fedi el), és X minden részhalmazának lineáris mértéke vagy nulla vagy végtelen. Ha ui. $Y \subset X$ és $\mathcal{H}^1 < \infty$, akkor $Y \subset U_\alpha$ valamelyik α-ra, amiből $Y \subset \{x_\beta : \beta \leq \alpha\}$, tehát Y megszámlálható és $\mathcal{H}^1(Y) = 0$.

Meg lehet mutatni, hogy a 7.Tétel állítása igaz minden lengyel térben. Ennek a bizonyítása azonban rendkivül bonyolult, ezért mi csak az $\mathbb{R}^p$-re vonatkozó tételt bizonyítsjuk. Legyen

$$\mathcal{D}^p_k = \left\{ \left[\frac{i_1 - 1}{2^k}, \frac{i_1}{2^k}\right) \times ... \times \left[\frac{i_p - 1}{2^k}, \frac{i_p}{2^k}\right) : i_1, i_2, ..., i_p \in \mathbf{Z} \right\}$$

minden k egész számra. A fenti rendszer elemeit k-adrendű diadikus kockának nevezzük. Legyen $\mathcal{D}^p = \bigcup_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}_k^p$. Könnyű belátni, hogy ha A és B különbžő diadikus kockák, akkor az $A \subset B$ és $B \subset A$ és $A \cap B = \emptyset$ relációk pontosan egyike fennáll. Ebből a megfigyelésből azonnal következik, az alábbi lemma.

LEMMA 1.8. *Legyen $\mathcal{A}$ diadikus kockáknak egy olyan rendszere, amelyben a kockák élhossza egy közös korlát alatt marad. Ekkor $\mathcal{A}$ minden eleme lefedhető maximális $\mathcal{A}$-beli kockával. Ha $\mathcal{B}$ jelölu az $\mathcal{A}$-beli maximális kockák halmazát, akkor B elemi páronként diszjunktak és $\bigcup \mathcal{B} = \bigcup \mathcal{A}$*

Tetszőleges $H \subset \mathbb{R}^p$ és $s > 0$ esetén legyen

$$m_k^s = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{diam} A_n)^s : H \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \in \bigcup_{i=k}^{\infty} \mathcal{D}_i^p (n = 1, 2, ...) \right\}.$$

Világos, hogy m_k^s külső mérték minden k-ra, és $0 \leq i \leq k$ esetén

$$m_i^s(H) \leq m_k^s(H).$$

LEMMA 1.9. *Tetszőleges $H \subset \mathbb{R}^p$ halmazra teljesülnek az alábbi állítások.*

(i) $\mathcal{H}^s(H) = 0 \Leftrightarrow m_0^s(H) = 0.$

(ii) Ha $m_0^s(H) = 0$, akkor minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $H \subset G$ nyílt halmaz, amelyre $m_0^s(G) < \varepsilon$.

(iii) Ha H korlátos, $i \geq 0$ egész, és $0 \leq c \leq m_i^s(H)$, akkor van egy K kompakt halmaz úgy, hogy $m_i^s(K \cap H) = c$.

BIZONYÍTÁS. (i) Legyen $m_0^s(H) = 0$. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ és $\delta > 0$-hoz van olyan $H \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$(kockákkal történő) lefedés, amelyre

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{diam} A_n)^s < \min(\varepsilon, \delta^s).$$

Ekkor $\mathrm{diam} A_n < \delta$ minden n-re, tehát $\mathcal{H}_\delta^s(H) < \varepsilon$. Mivel ez minden δ-ra igaz, ezért $\mathcal{H}^s(H) \leq \varepsilon$, amiből $\mathcal{H}^s(H) = 0$.

Most tegyük fel, hogy $\mathcal{H}^s(H) = 0$. Legyen $0 < \varepsilon < 1$ adott és vegyünk egy $H \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ lefedést, amelyre

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{diam} A_n)^s < \frac{\varepsilon}{2^{p+1} p^{s/2}}.$$

Feltehetjük, hogy mindegyik A_n halmaz legalább kételemű. Legyen $\mathrm{diam} A_n = r_n$; ekkor $0 < r_n < 1$ minden n-ra. Válasszunk olyan k_n egészeket, melyekre

$$2^{-k_n+1} \leq r_n < 2^{-k_n}.$$

Az A_n halmaz bármelyik tengelyre vett vetületének átmérője legfeljebb $r_n < 2^{-k_n}$, tehát egy ilyen vetület legfeljebb két $\left[\frac{i-1}{2^{k_n}}, \frac{i}{2^{k_n}}\right)$ alakú intervallum metszhet. Ezért A_n lefedhető legfeljebb 2^p darab k_n-edrendű diadikus kockával, ahol $k_n \geq 0$. Ebből

$$m_0^s(H) \leq 2^p \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{p} \cdot 2^{-k_n}\right)^s = 2^{p+s} p^{s/2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{-k_n-1}\right)^s \leq 2^{p+s} p^{s/2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (r_n)^s < \varepsilon.$$

Ezzel beláttuk, hogy $m_0^s(H) = 0$.

(ii) Vegyünk egy legalább 0-adrendű kockákkal történő $H \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ lefedést, amelyre

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\text{diam} A_n)^s < \varepsilon / 3^p.$$

Jelöljük B_n-el annak a 3^p darab A_n-nel azonos méretű diadikus kockának az unióját amelyek lezártja metszi A_n lezártját. Könnyű ellenőrizni, hogy $A_n \subset intB_n$ minden n-re, tehát a $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} intB_n$, nyílt halmaz lefedi H-t.Az is világos, hogy $m_0^s(G) < \varepsilon$.

(iii) Legyen Q egy H-t tartalmazó zárt kocka, és legyen $f : [0,1] \to Q$ folytonos szürjekció. Ekkor a

$$g(x) = m_i^s(H \cap f([0,x]))()(x \in [0,1])$$

függvény monoton növő, $g(0) = 0$ és $g(1) = m_i^s(H)$. Belátjuk, hogy g folytonos. Ha $0 \leq x < y \leq 1$, akkor

$$g(x) \leq g(y) = m_i^s(H \cap [f([0,x]) \cup f([x,y])]) \leq g(x) + m_i^s(f([x,y])).$$

Ha y elég közel van x-hez, akkor $f([x,y])$ átmérője tetszőlegesen kicsi lehet, és így lefedhető 2^p darab tetszőlegesen kicsi diadikus kockával. Így $\lim_{y \to x+0} m_i^s(f([x,y])) = 0$ vagyis g jobbról folytonos x-ben. Ugyanígy látható be, hogy g balról folytonos, minden $y \in (0,1]$ pontban. A feltételekből következik, hogy $g(x) = c$ egy alkalmas $x \in [0,1]$-re tehát a $K = f([0,x])$ halmaz kielégíti a kért feltételeket. □

LEMMA 1.10. *Ha $k \leq n$, akkor $\mathcal{D}_k^p$ elemei mérhetőek az m_i^s külső mértékre nézve.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $Q \in \mathcal{D}_k^p$ adott. Legyen $A \in \mathcal{D}_i^k (i \geq n)$ akkor vagy $AsuQ$ vagy $A \cap Q = \emptyset$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy ha egy H halmazt lefedünk legalább n-edrendű kockával, akkor ezek közül Q részhalmazai lefedik $H \cap Q$-t, a többi pedig $H \setminus Q$-t. Így $m_n^s(H) \geq m_n^s(H \cap Q) + m_n^s(H \setminus Q)$, vagyis Q mérhető. □

Legyen θ külső mérték X halmaz összes részhalmazán. Azt mondjuk, hogy θ alulról folytonos, ha valahányszor $H_n \subset X (n = 1, 2, ...)$ és $H_1 \subset H_2 \subset ...$, akkor

$$\theta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n\right) = \lim_{n\to\infty} \theta(H_n).$$

Belátható (elég bonyolultan), hogy m_0^s alulŕol folytonos $\mathbb{R}^p$-ben.

Tekintsük az alábbi lemmát.

LEMMA 1.11. *Ha $H \subset \mathbb{R}^p$ Borel és $\mathcal{H}^s(H) > 0$ akkor van olyan kompakt $K \subset H$ halmaz, amelyre $\mathcal{H}^s(K) > 0$.*

BIZONYÍTÁS. Tudjuk, hogy $\mathbb{R}^p$-ben minden Borel halmaz előáll mint egy lengyel tér kölcsönösen egyértelmű és folytonos képe. Legyen $H = f(X)$, ahol (X, d) lengyel tér és f folytonos bijekció X-ről H-ra. Legye $\theta(A) = m_0^s(f(A))$ minden $A \subset X$ esetén. Ekkor θ külső mérték és mivel m_0^s alulról félig folytonos, ezért θ is hasonló tulajdonsággal bír X-en. A feltétel szerint $\mathcal{H}^s(H) > 0$, tehát $m_0^s(H) > 0$, és így $\theta(X) = m_0^s(H) > 0$. Rögzítsünk egy $0 < c < \theta(X)$ számot.

Elég bizonyítani, hogy van olyan K_0 kompakt halmaz X-ben, amelyre a $\theta(K_0)) > 0$. Valóban, ekkor a $K = f(K_0)$ olyan kompakt részhalmaza H-nak, amelyre $m_0^s(K) > 0$, azaz $\mathcal{H}^s(K) > 0$.

Minden szeparábilis metrikus tér előáll mint olyan nem üres zárt halmazok megszámlálható uniója, melyek átmérői nem nagyobbak egy előre megadott δ-nál: vehetjük azokat a $\delta/2$ sugarú zárt gömböket, amelyek középpontjai befutják egy sűrű megszámlálható halmaz pontjait. Legyenek $B_n^1 (n = 1, 2, ...)$ legfeljebb 1 átmérőjű nemüres zárt halmazok, melyek lefedik X-et. Ekkor

$$c < \theta(X) = \theta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^1\right) = \lim_{N\to\infty} \theta\left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n^1\right),$$

tehát választhatunk egy N_1 indexet úgy, hogy az $F_1 = \cup_{n=1}^{N_1} B_n^1$ halmazra $\theta(F_1) > c$ teljesüljön. A zárt B_n^1 halmazok (mint X alterei) szintén szeparábilis metrikus terek, tehát előállnak mint megszámlálhatóan sok legfeljebb $1/2$ átmérőjű halmazok uniói. Ezeket a halmazokat egyetlen sorozatba rendezve egy B_n^2 sorozatot kapunk, a következő tulajdonságokkal: $F_1 = \cup_{n=1}^{\infty} B_n^2$, és mindegyik B_n^2 halmaz nemüres zárt, része valamelyik B_k^1-nek, és az átmérője legfeljebb $1/2$. Ekkor

$$c < \theta(X) = \theta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^2\right) = \lim_{N\to\infty} \theta\left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n^2\right),$$

tehát választhatunk egy $N_2 > N_1$ indexet úgy, hogy az $F_2 = \cup_{n=1}^{N_2} B_n^2$ halmazra $\theta(F_2) > c$ teljesüljön. Azt is feltehetjük, hogy minden $n \leq N_1$-re legyen olyan

$m \leq N_2$, amelyre $B_m^2 \subset B_n^1$. Az eljárást folytatva kapunk egy $B_n^k (n = 1, 2, ...)$ és F_k halmazokat minden k-ra. Belátjuk, hogy a $K_0 = \cap_{k=1}^{\infty} F_k$ halmaz kielégití a feltételeket. A K_0 halmaz zárt és teljesen korlátos, hiszem minden k-ra lefedhető N_k darab legfeljebb $1/k$ átmérőjű halmazzal. Ebből következik, hogy K_0 komapkat. Megmutatjuk, hogy $\theta(k_0) > 0$. Tegyük fel, hogy ez nem igaz. Ekkor

$$m_0^s(f(K_0)) = \theta(K_0) = 0,$$

tehát van egy $f(K_0) \subset G$ nyílt halmaz, amelyre $m_0^s(G) < c$. Legyen $U = f^{-1}(G)$. Ekkor U egy K_0-t tartalmazó nyílt halmaz, amelyre $\theta(U) < c$. Mivel $(X \setminus U) \cap K_0 = \emptyset$, $X \setminus U$ zárt és K_0 kompakt, ezért $\mathrm{dist}(X \setminus U, K_0) > 0$.

Megmutatjuk, hogy ha $1/k < \mathrm{dist}(X \setminus U, K_0)$ akkor $F_k \subset U$. Legyen $x \in F_k$ tetszőleges. Ekkor $x \in B_{n_k}^k$ valamely $n_k \leq N_k$-ra. A konstrukcióból következően egymás után választhatunk olyan $n_{k+1}, n_{k+2}, ...$ indexeket, amelyekre $B_{n_k}^k \supset B_{n_{k+1}}^{k+1} \supset ....$ A $\cap_{i=k}^{\infty} B_{n_i}^i$ metszet nemüres, mert $B_{n_i}^i$ nemüres, zárt, $\mathrm{diam} B_{n_i}^i \leq 1/i$ minden i-re, és az X tér teljes. Ha $y \in \cap_{i=k}^{\infty} B_{n_i}^i$, akkor $y \in K_0$ és $y \in B_{n_k}^k$, tehát

$$d(x, y) \leq 1/k < \mathrm{dist}(X \setminus U, K_0)$$

alapján $x \in U$. Ezzel beláttuk, hogy $F_k \subset U$. Ez azonban lehetetlen, hiszen $\theta(F_k) > c$, míg $\theta(U) < c$. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy $\theta(K_0) > 0$, amivel a lemmát beláttuk. □

1.3. A 7. tétel bizonyítása.

BIZONYÍTÁS. A diadikus kockákat határoló híepesíkokat diadikus hípesíkoknak fogjuk nevezni. Elöször feltesszük, hogy $\mathcal{H}^s(H \cap S) = 0$ minden S diadikus hípersíkra. Mivel a diadikus hípersíkok száma megszámlálható, ezért ezeket H-ból levonva H Hausdorff-mértékre nem változik, vagyis pozitív marad. Feltehetjük tehát, hogy H egyetlen diadikus hípersíkot sem metsz. Feltehető, az előzőek alapján, hogy H kompakt. Ebből következik, hogy $H \cap Q$ kompakt minden Q diadikus kockára, hiszen $\overline{H \cap Q} \subset H \cap \overline{Q} = H \cap Q$.

A $H \cap Q (Q \in \mathcal{D}_0^p)$ halmazok legalább egyikének a $\mathcal{H}^s$-mértéke pozitív. Rögzítsünk egy $Q_0 \in \mathcal{D}_0^p$ kockát, amelyre $\mathcal{H}^s(H \cap Q_0) > 0$.

Legyen $K_0 = H \cap Q_0$. Legyen $i \geq 0$, és tegyük fel, hogy $K_i \subset Q_0$ kompakt halmazt már konstruáltuk. Legyen $Q \in \mathcal{D}_i^p, Q \subset Q_0$ tetszőleges. Mivel

$$m_i^s(K_i \cap Q) \leq m_{i+1}^s(K_i \cap Q),$$

az előzőek alapján létezik egy E^Q kompakt halmaz, amelyre

$$m^s_{i+1}(E^Q \cap K_i \cap Q) = m^s_i(K_i \cap Q).$$

Nyilván feltehetjük, hogy $E^Q \subset K_i \cap Q$. Legyen

$$K_{i+1} = \bigcup \{E^Q : Q \in \mathcal{D}^p_i, Q \subset Q_0\}.$$

Ekkor $K_{i+1} \subset K_i$ komapakt, és

$$m^s_{i+1}(K_{i+1} \cap Q) = m^s_i(K_i \cap Q)$$

minden $Q \in \mathcal{D}^p_i$-re. Az előző lemmák alapján felhasználva ebből következik, hogy

$$m^s_{i+1}(K_{i+1}) = m^s_i(K_i).$$

Ezzel a K_i halmazokat minden i-re definiáltuk. Legyen $K = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_i$. Ekkor K komapakt, és $K \subset H$. Ekkor $m^s_i(K_i) = m^s_0(K_0)$ minden i-re. Mivel

$$m^s_i(K) \le m^s_i(K_i) = m^s_0(K_0)$$

minden i-re, ezért $m^s(K) \le m^s_0(K_0) \le (\text{diam} Q_0)^s$, tehát $\mathcal{H}^s(K) < \infty$.

Most belátjuk, hogy $\mathcal{H}^s(K) > 0$. Elég belátni, hogy $m^s_0(K) > 0$.

Elöször megmutatjuk, hogy ha $0 \le i \le n$, akkor

$$m^s_i(K_n \cap Q) = m^s_i(K_i \cap Q) \tag{6}$$

minden $Q \in \mathcal{D}^p_i$-re. Ezt rögzített n-re i szerint. visszafelé haladó indukcióval bizonyítjuk. Az állítás $i+1$-re igaz. Nyilván elég belátni, hogy a fenti egynlőség baloldala nem kisebb a jobb oldalnál. Tekintsük $K_n \cap Q$ egy lefedését legalább i-ed rendű diadikus kockákkal. Feltehetjük, hogy ezek mindegyike része Q-nak. Ha ezek között van Q-val egyenlő, akkor lefedés által meghatározott összeg legalább $(\text{diam} Q)^s \ge m^s_i(K_i \cap Q)$. Ha viszont lefedő kockák mindegyike valódi része Q-nak, akkor ezek a kockák mind legalább $i+1$-edrendűek, tehát a lefedés által meghatározott összeg legalább $m^s_{i+1}(K_n \cap Q)$. Mármost az indukciós feltevés szerint $m^s_{i+1}(K_n \cap T) = m^s_{i+1}(K_{i+1} \cap T)$ minden $T \in \mathcal{D}^s_{i+1}, T \subset Q$ esetén és így $m^s_{i+1}(K_n \cap Q) = m^s_{i+1}(K_{i+1} \cap Q)$. Itt a jobb oldal éppen $m^s_i(K_i \cap Q)$-val egyenlő, amivel beláttuk (5)-t.

Ha (5)-t alkalmazzuk $i = 0$-ra, akkor azt kapjuk, hogy $m^s_0(K_n) = m^s_0(K_0)$ minden n-re. Ebből már egyszerűen következik, hogy $m^s_0(K) = m^s_0(K_0)$. Ha ugyanis legalább 0-adrendű diadikus kockák egy rendszere lefedi K-t, akkor - amint azt a bizonyítás elején megállapítottuk - ezen kockák belsejei is lefedik K-t.Mivel $K_0 \supset K_1 \supset ...$ kompakt halmazok és $\bigcap_{n=1}^{\infty} K$ ezért a lefedő kockák belsejei a

K_n-t is lefedik minden elég nagy n-re. Így a lefedés által meghatározott összeg legalább $m_0^s(K_n) = m_0^s(K_0))$. Ezzel a tételt beláttuk abban az esetben amikor $\mathcal{H}^s(H \cap S) = 0$. minden S diadikus hipersíkra. Ez a feltétel a $p = 1$ esetben biztosan teljesül, hiszen ekkor a diadikus hipersíkok pontok, és $\mathcal{H}^s$ eltűnik a véges halmazokon.

Az általános esetet p szerint indukcióval bizonyítjuk. Legyen $p > 1$, és tegyük fel, hogy az állítás $p-1$-re igaz. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ é $\mathcal{H}^s(H) > 0$. Ha $\mathcal{H}^s(H \cap S) = 0$ minden S diadikus hipersíkra, akkor, mint láttuk, a tétel állítása igaz. Ha viszont van olyan S hieprsík, amelyre $\mathcal{H}^s(H \cap S) > 0$, akkor az indukciós feltevés szerint $H \cap S$-nek van olyan kompkat K részhalmaza, amelyre $0 < \mathcal{H}^s(K) < \infty$. □

Ennek az állításnak bizonyítására azért volt szükség, mert a síkbeli változathoz szükséges a Frostman lemma. Egyébként egy jó módszert adtunk annak a kiküszöbölésére, hogy valaminet a Hausdorff dimenziója (mértéke pozitív).

2. A Kakeya feladaról

2.1. Rövid történeti áttekintés. A Kakeya feladatnak a mai napon nagyon sok féle megfoglamazása ismert. A legegyszerűbb a következő. Értelmezzük a *Besicovitch halmazt* a következő képpen $E \subset \mathbb{R}^n$ ahol $n > 1$ egy olyan halmaz amely minden irányban tartlamaz egység szakaszt . A [**15**], [**3**], [**4**], dolgozatokban azt sejtik, hogy egy ilyen halmaznak a Hausdorff dimenziója n. Egy gyengébb verziója ennek a sejtésnek az, hogy ilyen halmaznak a felső Minkowski dimenziója n. Egy erősebb variánsa pedig a [**6**], [**15**] dolgozatokban, az, hogy *Kakeya maximal függvény* $\mathcal{K}_\delta f(\omega) := \sup_{T//\omega} \frac{1}{|T|} \int_T |f|$, ahol $\delta > 0$ rögzített kicsi szám, $\omega \in S^{n-1}$, és T $1 \times \delta \ldots \delta$ cső, ami párhuzamos ω-val, korlátos $L^n(\mathbb{R}^n)$, $C_\varepsilon \delta^{-\varepsilon}$ korláttal minden $\varepsilon > 0$-ra.

Nézzük meg, hogy honnan is indult ez a matematikai feladat. Vannak matematikai problémák, amelyek első pillantásra minden jelentőséget nélkülöznek, és a felületes érdekességen kívül nem tűnnek sem fontosnak, sem hasznosnak. Évtizedek múltán azonban kiderül, hogy a probléma nagyon is inspiráló volt, és hogy az elmélet milyen sokat köszönhetett a probléma megoldására irányuló kísérleteknek vagy a megoldásból kiinduló újabb kutatásoknak. Ezek azok a problémák, amelyek az elméleti, "absztrakt" matematika és a pejoratív értelemben használt ún. "problémamegoldó" matematika szembeállítását értelmetlenné teszik.

Ilyen inspiráló problémának bizonyult a következő kérdés, amelyet S. Kakeya japán matematikus vetett fel 1917-ben:
Melyik az a legkisebb területű síkbeli tartomány, amelyben egy egységnyi hosszúságú szakasz megfordítható, azaz folytonos mozgással önmagába vihető úgy, hogy közben 2π-os fordulatot tegyen?
Nevezzük K-halmaznak azokat a síkbeli tartományokat, amelyekben egy egységnyi hosszúságú szakasz megfordítható. Az egységnyi átmérőjű körlap nyilván K-halmaz, hiszen az átmérőjét a középpont körül megforgatva a körlapban maradunk. Ez tehát egy $\pi/4 \approx 0,78$ területű K-halmaz.
Abram Samojlovich Besicovitch (1891-1970) századunk egyik legeredetibb gondolkozású matematikusa volt. Oroszországban született, de 1924-ben elhagyta az országot; egy évet Koppenhágában töltött (ahol Pál Gyula is működött), majd Angliában telepedett le. Besicovitch 1920-ban publikált egy dolgozatot, amelyben - a Kakeya-problémáról mit sem tudva - olyan nullterületű síkbeli halmazt konstruált, amely minden irányban tartalmaz egységnyi hosszúságú szakaszt. Oroszország akkori izoláltsága miatt Besicovitch cikke nem jutott el a nemzetközi matematikai köztudatba, aminthogy a Kakeya-probléma sem jutott el Oroszországba. De Besicovitch emigrációja után az eredmény hamarosan ismertté vált. Besicovitch eredeti konstrukciója olyan nullterületű halmazt ad meg, amely minden irányban tartalmaz egységnyi hosszúságú szakaszt. A nullterületű halmaz fogalmának általánosítása az ún. nullmértékű halmaz. (Egy halmazt akkor nevezünk nullmértékűnek, ha lefedhető téglalapok olyan végtelen sorozatával, amelynek a területösszege tetszőlegesen kicsi lehet.) A nullmértékű halmazok, bár lényegesen nagyobbak lehetnek, mint a nullterületűek (például nem feltétlenül korlátosak), még mindig "kis" halmazoknak tekinthetők. Besicovitch megmutatta, hogy van olyan nullmértékű halmaz, amely minden irányban tartalmaz teljes egyenest. Besicovitchnak ez a tétele döntő hatással volt a geometriai mértékelmélet fejlődésére. Kiderült, hogy ez a tény a síkbeli halmazok szerkezetének megértését nagy lépéssel viszi előbbre, és alapvető fontosságú a kétváltozós függvények és a mértékek integrálásának elméletében. Felmerült a kérdés, hogy vannak-e hasonló tulajdonságú halmazok a térben vagy még magasabb dimenzióban. Ha a síkbeli Besicovitch-halmazt egy egyenes körül megforgatjuk, akkor olyan térbeli nullmértékű halmazt kapunk, amely minden (térbeli) irányban tartalmaz egyenest, azaz minden térbeli egyenesnek tartalmazza egy eltoltját. De van-e olyan térbeli nullmértékű halmaz, amely minden síknak tartalmazza egy eltoltját? Ezt a kérdést csak 1979-ben sikerült megoldani, amikor is J. M. Marstrand (Besicovitch egyik

tanítványa) megmutatta, hogy ilyen halmaz nem létezik! A következő általános kérdés az volt, hogy adott $n > k$ esetén van-e az n dimenziós térnek olyan nullmértékű részhalmaza, amely minden k dimenziós ún. hipersíknak tartalmazza egy eltoltját. A kérdést K. J. Falconer döntötte el 1980-ban; kiderült, hogy $k = 1$ esetén van ilyen halmaz, de $k > 1$-re nincs. De térjünk vissza a síkra! 1968-ban Besicovitch és R. Rado, valamint tőlük függetlenül J. R. Kinney konstruáltak olyan síkbeli nullmértékű halmazt, amely minden r-re tartalmaz r sugarú körvonalat; tehát minden síkbeli körvonalnak tartalmazza egy eltoltját. 1971-ben R. O. Davies olyan nullmértékű halmazt konstruált, amely minden sokszögvonalnak tartalmazza egy eltoltját. Különös módon ennél általánosabb görbékre nem sikerült hasonló halmazokat konstruálni. Nem ismeretes például, hogy van-e olyan nullmértékű halmaz, amely minden ellipszisnek tartalmazza egy eltoltját.

3. Dimenzió becslések

3.1. Jelölések. Az mondjuk, hogy $A \gtrsim B$ ha létezik egy olyan C konstans, hogy $A \geq CB$. A C univerzális de sorról sorra változhat. Úgy értelmezzük a *lejtőket* mint $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ elemeit, és egy r lejtőt *valódinak mondunk* ha $r \neq -1$. Ha X egy véges halmaz, a $\#(X)$ jelölést használjuk X elemszámaira. Azt mondjuk, hogy X' egy *finomítása* az X-nek ha $X' \subseteq X$ és $\#(X') \sim \#(X)$. Ha $f : X \to Y$ egy leképezés, akkor $x \sim_f x'$ a $f(x) = f(x')$-t jelenti. Ez a következő ekvivalencia osztályokat $[x]_f^{(X)} := \{x' \in X : x \sim_f x'\}$ határozza meg. Hasonlóan értelmezzük $[x]_{f,g}^{(X)} := [x]_f^{(X)} \cap [x]_g^{(X)}$, stb. A Cauchy-Schwarz alapján észrevesszük a

$$\#(\{(x_1, x_2) \in X \times X : s_1 \sim_f s_2\}) \geq \#(X)^2/\#(Y). \tag{7}$$

egyenlőtlenséget. Ha $f_i : X \to Y_i$ leképezések $i = 1, \ldots, k$ és $F : X \to Y$ egy másik leképezés, azt mondjuk F *meghatározott* $f_1, \ldots, f_k$ *X-n* ha $[x]_{f_1,\ldots,f_k}^{(X)} \subseteq [x]_F^{(X)}$ minden $x \in X$. Ha az identikus leképezés X-n az $f_1, \ldots, f_k$ által meg van határozva, akkor azt mondjuk, hogy X-t $f_1, \ldots, f_k$ *parametrizálja.*
Legyen tetszőleges $X_1, \ldots, X_k$ és $1 \leq i \leq k$, ekkor értelmezzük a koordináta függvényeket $\gamma_i : X_1 \times \ldots \times X_k \to X_i$ melyre $\gamma_i(x_1, \ldots, x_k) := x_i$. Illetve $\gamma_{i,j} : X_1 \times \ldots \times X_k \to X_i \times X_j$ melyre $\gamma_{i,j}(x_1, \ldots, x_k) := (x_i, x_j)$.
Ha $f : X \to Y$ egy X véges halmazt képez le egy másik véges Y halmazra, akkor jelölje:

$$X^{<f>} := \{x \in X : \#([x]_f) \geq \#(X)/(2\#(Y))\}.$$

Világos, hogy $\#(X \backslash X^{<f>}) < \#(X)/2$ és $X^{<f>}$ finomítása X-nek. Az $X^{<f>,<g>}$ a $(X^{<f>})^{<g>}$-t jelenti.

Ha $f(x)$ halmazértékű függvény X-n, akkor $\bigcup f(X)$ a $\bigcup_{x\in X} f(x)$-t jelenti.

3.2. Minkowski dimenzió becslés. Legyen Z egy valós vektor tér. Minden $r \in \mathbb{R}$ lejtőre, $\pi_r : Z\times Z \to Z$ a $\pi_r(a,b) := a+rb$ ha $r \neq \infty$ és $\pi_\infty(a,b) := b$ különben. Minden két $r \neq r'$ esetén a következő fontos tulajdonságot vesszük észre:

$$Z \times Z\text{-t parametrizálja a } \pi_r, \pi_{r'}. \tag{8}$$

Két r, r' lejtőre, értelmezzük $\pi_{r\otimes r'} : (Z\times Z)\times(Z\times Z) \to Z\times Z$ amit $\pi_{r\otimes r'}(g,g') := (\pi_r(g), \pi_{r'}(g'))$ csatolás ad meg.

Értelmezés 3.1. *Legyen R véges sok valódi lejtők halmaza, és $\alpha \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy $SD(R,\alpha)$ teljesül, ha $\#(G) \lesssim \sup_{r\in R} \#(\pi_r(G))^\alpha$ amikor $G \subseteq Z\times Z$ egy véges halmaz és*

$$G \textit{ pararmetrizálva van } \pi_{-1} \textit{ által} \tag{9}$$

Azt mondjuk, hogy $SD(\alpha)$ teljesül, ha minden $\varepsilon > 0$ létezik R véges valódi lejtők halmaza úgy, hogy $SD(R,\alpha+\varepsilon)$ teljesül.

Bourgain magyarázata alapján ([**4**]-ben)látjuk, hogy ha a $SD(\alpha)$ maga után vonja, hogy Besicovitch halmaznak a felső Minkowski dimenziója legalább $\frac{n}{\alpha} + \frac{\alpha-1}{\alpha}$.

Ugyancsak ([**4**]) láthatjuk, hogy $SD(\{0,1,\infty\}, 2-\frac{1}{13})$ igazolva van. Terence Tao és Nets Hawk Katz ([**8**]) igazolták, hogy $SD(\{0,1,\infty\}, 2-\frac{1}{6})$, majd

Tétel 3.2. *[**8**] Igaz a következő*

$$SD\left(\{0,1,2,\infty\}, 2-\frac{1}{4}\right)$$

.

Bizonyítás. Legyen $N := \sup_{r\in\{0,1,2,\infty\}}(\#(\pi_r(G)))$, ekkor igazolnunk kell, hogy $\#(G) \lesssim N^{7/4}$.

Értelmezzük a $V \subset G\times G$ halmazt a következőképpen

$$V := \{(g,g') \in G\times G : g \sim_{\pi_0} g'\} = \{((a,b_1),(a,b_2)) : (a,b_1),(a,b_2) \in G\}.$$

Bevezetjük a $\nu : V \to Z$ függvényt, amelyet a következő képpen adunk meg $\nu((a,b_1),(a,b_2)) := a + 2b_1 - b_2$. Mivel $\nu = \pi_2\circ\gamma_1 - \pi_\infty\circ\gamma_2 = 2\pi_1\circ\gamma_1 - \pi_1\circ\gamma_2$ láthatjuk, hogy ν a $\pi_{2\otimes\infty}$ illetve $\pi_{1\otimes 1}$ által meg van határozva. Mivel $\nu = 2\pi_\infty\circ\gamma_1 + \pi_{-1}\circ\gamma_2$ és (9) alapján beláthatjuk, hogy V-t $\nu, \pi_\infty\circ\gamma_1$ parametrizálja.

Legyen v_2 at V következő finomításából $V^{<\pi_{1\otimes 1}>,<\pi_{2\otimes\infty}>}$ egy elem. A szerkesztés alapján

$$\#(\{(v_1,v_0) \in V^{<\pi_{1\otimes 1}>} \times V : v_2 \sim_{\pi_{2\otimes\infty}} v_1 \sim_{\pi_{1\otimes 1}} v_0\}) \gtrsim \#(V)^2/N^4.$$

Minden v_0-hoz létezik legtöbb egy v_1 amelyik megfelel a (8). Mivel ν-t $\pi_{1\otimes 1}$ és $\pi_{2\otimes\infty}$ meghatározza, ezért $\#([v_0]_\nu^{(V)}) \gtrsim \#(V)^2/N^4$. Másrészt, V-t parametrizálja a ν és $\pi_\infty \circ \gamma_1$, tehát $\#([v_0]_\nu^{(V)}) \leq \#(\pi_\infty \circ \gamma_1(V)) \leq N$. Összegezve ezeket $\#(V) \lesssim N^{3/2}$. Másrészről a (7) alapján $\#(V) \geq \#(G)^2/N$. Amiből a bizonyítás teljesen világos. □

Adjunk egy általánosabb kijelentést a 3.2 tételre, ahol az r_i lejtők jóval általánosabbak. Legyen G rögzített és r_0 egy valódi lejtő, valamint $V = V^{r_0} := \{(g, g') \in G^2 : g \sim_{\pi_{r_0}} g'\}$. Rögzítsünk egy újabb $r_\infty \neq r_0$ lejtőt és $s \neq 0$ valós számot, valamint értelmezzük a következő függvényt $\nu : G \to \mathbf{Z}$

$$\nu(g, g') := s\pi_{r_\infty}(g) + \pi_{-1}(g').$$

Minden $r \neq r_0, r_\infty$ valódi lejtőre, legyen r' olyan egyértelmű lejtő, hogy ν-t meghatározza a $\pi_{r\otimes r'}$ V-n, vagy

$$s\pi_{r_\infty}(g) + \pi_{-1}(g') = x\pi_r(g) + y\pi_{r'}(g') + z(\pi_{r_0}(g) - \pi_{r_0}(g'))$$

valamilyen $x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén. Az r'-re úgy hivatkozunk mint az r *duális lejtője* r_0 és ν függvényében. Abban a sajátos esetben $r_0 = 0$, $r_\infty = \infty$, r'-ra a következő teljesül $\frac{s}{r} - \frac{1}{r'} = 1$.

Mivel V-t parametrizálja a ν és $\pi_{r_\infty} \circ \gamma_1$, ezért

$$\#([v]_\nu^{(V)}) \leq \#(\pi_{r_\infty}(G)) \text{ for all } v \in V. \tag{10}$$

Másrészt, ha r_1, r_2 úgy, hogy $r_1, r_2, r_1', r_2', -1, r_0, r_\infty$ hat lejtők legyenek különbözőek, akkor (8) alapján V-t parametrizálja a $\pi_{r_1\otimes r_1'}$ és $\pi_{r_2\otimes r_2'}$. Ekkor a következő tételhez jutunk.

Tétel 3.3. *A fentiek alapján* $SD(\{r_0, r_1, r_1', r_2, r_2', r_\infty\}, \frac{7}{4})$.

A hátrány a 3.2 Tétellel szemben, hogy most 6 lejtőre volt szükségünk, a négy helyett. Az előny az, hogy kézenfekvőbb a hat szeletet kiválasztani.

Javítani tudjuk $\frac{7}{4}$ kitevőt, ha figyelembe vesszük a következő lemmát:

Lemma 3.4. *Legyenek* G, r_0, r_∞, V, ν *mint a fentiekben. Legyen* $r_1, \ldots, r_k$ *olyan lejtők, hogy az alábbi* $2k + 2$ *lejtő*

$$\{r_0, r_\infty, r_1, \ldots, r_k, r_1', \ldots, r_k'\} \tag{11}$$

legyen valódi és különböző. Legyen $N \geq 1$ *olyan, hogy* $\#(\pi_r(G)) \leq N$ *minden* r*-re* (11)*-ban. Minden* $\nu_0 \in Z$*, esetén legyen* $G_{\nu_0} \subseteq G$

$$G_{\nu_0} := \gamma_1(\nu^{-1}(\nu_0)) = \{g \in G : (g, g') \in V \text{ és } \nu(g, g') = \nu_0 \text{ valamilyen } g' \in G\}.$$

Ekkor

$$\#(G_{\nu_0}) \leq N \tag{12}$$

minden $\nu_0 \in Z$. *Mitőbb, létezik egy* $\nu_0 \in Z$ *és egy finomítása* G_{ν_0}*-nek, ami* G'_{ν_0} *úgy, hogy*

$$\pi_{r_j}(G'_{\nu_0}) \lesssim \frac{\#(G_{\nu_0})}{\#(V)/N^2} \tag{13}$$

minden $j = 1, \ldots, k$ *esetén.*

KÖVETKEZMÉNY 3.5. *Minden* $1 < \beta \leq 2$, *esetén* $SD\,(\beta) \implies SD\left(\frac{4\beta-1}{2\beta}\right)$.

BIZONYÍTÁS. Nyilvánvaló, hogy elég igazolnunk, azt hogy minden R_0 véges valódi lejtő halmazra, találunk egy R véges lejtő halmazt úgy, hogy

$$SD(R_0, \beta) \implies SD\left(R, \frac{4\beta - 1}{2\beta}\right).$$

Rögzítsük most R_0-t. Legyen r_0 , r_∞, és ν úgy, hogy az (11)-ban a lejtők legyenek valódiak és különbözőek. Ekkor legyen R az (11)-ben levő halmaz. Legyen $N \geq 1$, és $G \subseteq Z \times Z$ amelyre (9) olyan, hogy $\#(\pi_r(G)) \leq N$ minden $r \in R$. Ekkor a fenitek alapján (3.4) kapjuk, hogy egy $\nu_0 \in Z$ és $G'_{\nu_0} \subseteq G$ megfelel a Lemmának.

Most alkalmazzuk a feltételbeli $SD(R_0, \beta)$ G-re helyetesítve egy kisebb G'_{ν_0} halmazzal . A (13) alapján $\#(G_{\nu_0}) \lesssim \left(\frac{\#(G_{\nu_0})}{\#(V)/N^2}\right)^\beta$; ez a (12) és néhány algebrai számolás után $\#(V) \lesssim N^{\frac{3\beta-1}{\beta}}$. Összegezve a $\#(V) \geq \#(G)^2/N$ a (7)-ből kapjuk a bizonyítandó kijelentést. □

ÉRTELMEZÉS 3.6. *Értelmezzük a* (diszkretizált pontot) *mint a* $P := N^{-1}\mathbf{Z}^n \cap B(0, C)$ *háló elemét. Értelemezzük a* (diszkretizált) egyenes *amely olyan halmaz, amelynek minden pontja* P*-ből van és még a pontot* CN^{-1} *is hozzávesszük, egy ilyen egyenesnek a szöge a függőlegessel* $\ll 1$. *Ilyen egyeneseknek a szám* $\sim N$. *Minden* $N^{-1} \leq r \leq 1$, *azt mondjuk, hogy egyenesek* $\mathbf{T}$ *rendszere* r-szeparábilis *ha az irányuk* r*-szeparábilis.*

Megjegyezzük hogy szeparábilis egyenesek számossága legtöbb $\lesssim N^{n-1}$. Láthatjuk, hogy két pont egynél több egyenest is meghatározhat; valóban

$$\#(\{T \in \mathbf{T} : x_1, x_2 \in T\}) \lessapprox |x_1 - x_2|^{1-n} \tag{14}$$

minden $\mathbf{T}$ szeparábilis egyenesek rendszerére.

A standard diszkrétizáció alapján, a Kakeya becslés a diszkrét verzió alapján fog következni

$$\left(\sum_{T\in\mathbf{T}}\left(\sum_{x\in T} f(x)\right)^{(n-1)p'}\right)^{1/(n-1)p'} \lessapprox N^{1/p'}\|f\|_{l^p(P)} \tag{15}$$

minden $\mathbf{T}$ véges egyenesek rendszerére, amelyben nincs kettő amelyik lényegileg párhuzamos lenne. Ilyen rendszerre a következő egyenlőtlenség kell$\#(\mathbf{T}) \lessapprox N^{n-1}$ teljesüljön.

ÉRTELMEZÉS 3.7. *Legyen* $\mathbf{T}$ *egyenesek rendszere, amely szeparábilis . Értelmezzük az* árnyékát $\mathbf{T}$*-nek amelyet a következő leképezés ad meg* $Y : T \mapsto Y(T)$ $\mathbf{T}$*-n úgy, hogy* $Y(T)$ *részhalmaza* T*-nek minden* $T \in \mathbf{T}$*. Legyen* $0 < \lambda < 1$*. Azt mondjuk, hogy az* Y *árnyéknak* a sűrűsége λ $\mathbf{T}$-n *ha*

$$\#(Y(T)) \approx \lambda\#(\mathbf{T}) \approx \lambda N \textit{ for all } T \in \mathbf{T}.$$

Ha helyetesítjük $\approx$ $\gtrapprox$*-vel, akkor azt mondjuk, hogy az* Y *árnyéknak a* sűrűsége legalább λ $\mathbf{T}$-n*, stb. Értelmezünk egy* számláló függvényt: $\mu_{Y,\mathbf{T}}$ Y*-nak úgy, hogy* $\mu_{Y,\mathbf{T}}(x) := \sum_{T\in\mathbf{T}} \chi_{Y(T)}(x)$*, és* $\text{mass}_{\mathbf{T}}(Y)$ *legyen a következő szám* $\text{mass}_{\mathbf{T}}(Y) := \sum_{T\in\mathbf{T}} \#(Y(T)) = \|\mu_{Y,\mathbf{T}}\|_{l^1}$*. Ha* $\text{mass}_{\mathbf{T}}(Y) \approx N\#(\mathbf{T})$*, akkor azt mondjuk, az árnyék* telített $\mathbf{T}$-ben.

A (15)-hoz elég lenne,

$$N\lambda\#(\mathbf{T})^{1/(n-1)p'} \lessapprox N^{1/p'}\#\left(\bigcup Y(\mathbf{T})\right)^{1/p} \tag{16}$$

minden $\mathbf{T}$ szeparábilisra , minden $1/N < \lambda \leq 1$, és Y árnyékra amelynek a sűrűsége λ $\mathbf{T}$-n. Újra írhatjuk a (16)-t ha használjuk a $p = (4n+3)/7$-t

$$\#\left(\bigcup Y(\mathbf{T})\right) \gtrapprox \lambda^{(4n+3)/7} N\#(\mathbf{T})^{\frac{4}{7}}. \tag{17}$$

Rögzítsük most a $\mathbf{T}$-t, λ-t, Y-t. A [**15**] alapján egy újabb redukciós alakot használunk, névlegesen *két végű redukciót.* Ez alapján feltehetjük, hogy

$$\#(Y(T) \cap B(x,r)) \lessapprox \lambda r^{\sigma} N \tag{18}$$

minden $0 < r \ll 1$, $T \in \mathbf{T}$ és valamilyen $\sigma > 0$ konstansra ami függ p-től és n-től.

3.3. Hausdorff dimenzió becslés.

Bourgain ([**3**]) dolgozata alapján , a (16)-ben a p megtalálása maga után vonja, hogy $\mathbb{R}^n$-ben egy Besicovitch halmaznak a dimenziója legalább p. Ezért valójában (16)-t kell igazolnunk abban a speciális esetben mikor $\lambda \approx 1$.

ÉRTELMEZÉS 3.8. *Legyen* $n, d > 0$ valós *számok. Azt mondjuk, hogy érvényes a* Kakeya becslés $K(n,d)$ *ha teljesül* $\#(\bigcup Y(\mathbf{T})) \gtrapprox N^d$ *amikor* $\mathbf{T}$ *egy telített* $n-1$ *egyenes kollekciója, valamilyen* M *környező dimenzióban , és* Y *telített árnyék* $\mathbf{T}$*-n.*

A $K(n,d)$ állítás következménye, hogy a Besicovitch halmaznak $\mathbb{R}^n$ a Hausdorff dimenziója legalább d. Valamint a $K(n,d)$ állítás következménye a következő általánosítás

$$\#\left(\bigcup Y(\mathbf{T})\right) \gtrapprox \frac{\#(\mathbf{T})}{N^{n-1}} N^d \tag{19}$$

ha nem vesszük figyelmbe azt a feltételt, hogy $\mathbf{T}$ telített.

TÉTEL 3.9. *Legyen* $0 < d < n$. *A* $K(n,d)$ *állítás és a* $K(d+1, d')$ *állítás következménye* $K\left(n, \frac{2n+1+d'}{4}\right)$.

Pillanatnyilag fogadjuk, el hogy a 3.9 tétel teljesül. Akkor az következő alakú állítások teljesülnek

$$K(n, a(n-4)+3-b) \text{ for all } n \in \mathbb{R}^+$$

valamilyen $a, b > 0$ konstansokra. Ezek a típusu állítások következménye

$$K\left(n, \frac{a^2+2}{4}(n-4)+3-b\left(\frac{a+1}{2}\right)\right) \text{ minden } n \in \mathbb{R}^+.$$

(Alkalmazzuk a 3.9 tételt $d := a(n-4)+3-b$ és $d' := a(d-3)+3-b$-re). Iteráció alapján $K(n, (2-\sqrt{2})(n-4)+3+\varepsilon)$ minden $\varepsilon > 0$, ami alapján kapunk egy Hausdorff dimenzió becslést, névlegesen a $(2-\sqrt{2})(n-4)+3$.

BIZONYÍTÁS. Rögzítsük, most az n, d, d'. Legyen d elég nagy, ahhoz, hogy a $K(n, d+\varepsilon)$ állítás már ne teljesüljön. A következő egyenlőtlenséget szükséges igazolnunk$\frac{(2n+1+d')}{4} \leq d + C\varepsilon$, mivel a kért eredmény követekezik ha $\varepsilon \to 0$.

Mivel $K(n,d)$ teljesül és $K(n, d+\varepsilon)$ már nem teljesül,létezik egy M dimenzió, úgy, hogy a -beli feltételek teljesüljenek úgy, hogy

$$\#(E) \approx N^d, \tag{20}$$

ahol $E := \bigcup Y(\mathbf{T})$. Ekkor a következőt kell igazolnunk

$$\#(E) \gtrapprox N^{(2n+1+d')/4}. \tag{21}$$

Legyen C egy nagy konstans, és $1/N < r < 1$ egy diadikus sugár. Egy $B(x,r)$ gömböt *nehéznek* mondunk, ha

$$\#(E \cap B(x,r)) \geq N^{C\varepsilon}(Nr)^d. \tag{22}$$

Legyen E_r az E azon pontjai amelyek legalább egy $B(x,r)$ nehéz gömbben vannak. A következőt sejtjük

$$\sum_{T\in\mathbf{T}} \#(Y(T)\cap E_r) \leq N^{-\varepsilon} \sum_{T\in\mathbf{T}} \#(Y(T)) \tag{23}$$

ha C elég nagy.

Ahhoz, hogy ezt belássuk, elöször tegyük fel az ellenkezőjét, hogy a fenti egyenlőtlenség nem teljesül. Akkor az $Y_r(T) := Y(T)\cap E_r$ telített. Kaphatunk egy $\mathbf{T}_r$ finomítását $\mathbf{T}$ úgy, hogy Y_r-nek a sűrűsége 1 legyen $\mathbf{T}_r$-n.

Az E_r halmaz része az r sugarú nehéz gömböknek. Sőt azt is beláthatjuk, hogy azon nehézgömbök száma amelyek lefedeik az E_r-t $\gtrapprox r^{-d}$. Alapján (22) $\#(E_r) \gtrapprox N^{C\varepsilon}(rN)^d r^{-d}$, ami ellentmond (20) ha C elég nagy. Ezzel beláttuk a (23).

Legyen $E' := E\backslash\bigcup_{1/N<r<1} E_r$ és értelmezzük az $Y'(T) := Y(T)\cap E'$ árnyékot $\mathbf{T}$-n. Mivel Y telített $\mathbf{T}$-n, ezért (23) alapján belátható, hogy Y' is telített $\mathbf{T}$-n.

Mivel Y' telített $\mathbf{T}$-n, találhatunk $\mathbf{T}'$ finomítását a $\mathbf{T}$-nek, úgy hogy Y' sűrűsége 1 $\mathbf{T}'$-n, vagyis sajátosan

$$\#(\{(x,T)\in E'\times\mathbf{T}' : x\in Y'(T)\}) = \mathrm{mass}_{\mathbf{T}'}(Y') \approx N\#(\mathbf{T}') \approx N^n.$$

A (7) alapján és a szita formula alapján

$$\#(\{(x,T_1,T_2)\in E'\times(\mathbf{T}')^2 : x\in Y'(T_1)\cap Y'(T_2); \angle(T_1,T_2)\sim\theta\}) \gtrapprox N^{2n-d}$$

for some $N^{-1}\leq\theta\leq 1$; az átlós contribution $l_1 = l_2$ kihúzható mivel $d<n$. Másik szita formula alapján található egy ω irány úgy, hogy

$$\#(\{(x,T_1,T_2)\in E'\times(\mathbf{T}')^2 : x\in Y'(T_1)\cap Y'(T_2); \angle(T_1,T_2)\sim\theta; \angle(T_1,\omega),\angle(T_2,\omega)\lessapprox\theta\}) \gtrapprox N^{2n-d}\theta^{n-1}.$$

Legyen $\theta = 1$ ekkor

$$\#(A) \gtrapprox N^{2n-d}. \tag{24}$$

ahol $A := \{(x,T_1,T_2)\in E'\times(\mathbf{T}')^2 : x\in Y'(T_1)\cap Y'(T_2); \angle(T_1,T_2)\sim 1\}$. Az $\alpha\in A$ úgy fogunk hivatkozni mint *szögekre*, és $x(\alpha), T_1(\alpha), T_2(\alpha)$ írunk x, T_1, T_2-helyett.

ÉRTELMEZÉS 3.10. *Legyen α egy szög. Egy $z\in P$ pont egy* szögpontja *α-nak*

- *ha z távolsága ≈ 1 mind a $T_1(\alpha)$ és mind a $T_2(\alpha)$-től , és lényegileg koplanáris a $T_1(\alpha)$, $T_2(\alpha)$-vel.*
- *ha létezik egy $i_{\alpha,z}\in Y'(T_1(\alpha))$ pont úgy, hogy $c - i_{\alpha,z}$ lényegileg párhuzamos $T_2(\alpha)$-vel.*

- $$\#(\{(y_1,y_2)\in Y'(T_1(\alpha))\times Y'(T_2(\alpha)) : y_1, z, y_2 \text{ lényegileg kollineárisak}\}) \approx N. \tag{25}$$

Legyen $\Omega := \{(\alpha, z) \in A \times P : z$ szögpontja α -nak$\}$ a szögpont-párok halmaza.

LEMMA 3.11. *Minden $\alpha \in A$ esetén $\#(\{z \in P : (\alpha, z) \in \Omega\}) \approx N^2$.*

BIZONYÍTÁS. A felső korlát igazolása triviális,tehát az alsó korlátot kell igazolnunk. Rögzítsünk egy α, és legyen X a következő

$$X := \{(i, y_1, y_2) \in Y'(T_1(\alpha))^2\times Y'(T_2(\alpha)) : |i-y_1|, |i-x(\alpha)|, |y_1-x(\alpha)|, |y_2-x(\alpha)| \approx 1\}.$$

Mivel $\#(Y'(T_1(\alpha))^2 \times Y'(T_2(\alpha))) \approx N^3$ ezért belátható, hogy $\#(X) \approx N^3$.

Minden $\tau = (i, y_1, y_2) \in X$, találhatunk egy $\nu(\tau)$ pontot amely távolsága ≈ 1 a $T_1(\alpha)$ és $T_2(\alpha)$-től, lényegileg koplanáris a $T_1(\alpha), T_2(\alpha)$-val, lényegileg kollineáris az y_1, y_2-vel,és úgy, hogy $\nu(\tau) - i$ lényegileg párhuzam $T_2(\alpha)$-vel. Rögzítsük le ezt a $\nu : X \to P$ függvényt.

Mivel a $\nu(\tau)$ lényegileg koplanáris a $T_1(\alpha)$ és $T_2(\alpha)$ ezért belátható, hogy $\#(\nu(X)) \lessapprox N^2$. Másrészt, $\#(\nu^{-1}(z)) \lessapprox N$ minden $z \in ¶$, és, hogy

$$\#(\{z \in \nu(X) : \#(\nu^{-1}(z)) \approx N\}) \approx N^2.$$

Mivel minden z α szögpontja, ezért az állításunkat igazoltuk. □

Az előző lemma és a (24) alapján

$$\#(\Omega) \approx N^2\#(A) \gtrapprox N^{2n-d+2}. \tag{26}$$

Legyen $f : \Omega \to P \times P$, $f(\alpha, z) := (z, i_{\alpha,z})$ leképezés.

LEMMA 3.12. *Ekkor $\#(f(\Omega)) \approx N^2\#(A) \approx \#(\Omega)$.*

BIZONYÍTÁS. Elöször vegyük észre, hogy $f(\alpha, z)$ meghatározza $T_2(\alpha)$ .Mivel találhatunk egy Ω' finomítását Ω-nak úgy, hogy t $T_2(\alpha)$-t a $f(\alpha, z)$ meghatározza Ω'-n.

A (7) és a szitaformula alapján

$$\#(\{((\alpha, z), (\alpha', z')) \in \Omega' \times \Omega' : (\alpha, z) \sim_f (\alpha', z'); \angle(T_1(\alpha), T_1(\alpha')) \sim \theta\}) \lessapprox N^2\#(A)$$

minden $1/N \le \theta \le 1$.

Legyen θ, és tekintsünk egy $\alpha \in A$. Ha $((\alpha, z), (\alpha', z))$ a fenti halmaz eleme, akkor $z = z'$ és $T_1(\alpha)$, $T_1(\alpha')$, és $T_2(\alpha) = T_2'(\alpha)$ lényegileg koplanárisok, tehát a $T_1(\alpha')$ lehetséges száma $\lessapprox N\theta$ mivel L szeparált. Minden $T_1(\alpha')$, $i_{\alpha,z}$ száma $\leq \#(T_1(\alpha) \cap T_1(\alpha')) \lessapprox 1/\theta$. Mivel $z - i_{\alpha,z}$ lényegileg párhuzamos $T_2(\alpha)$, a z száma $\lessapprox N/\theta$. □

Most hasznĺjuk a fenti lemmát rögzített Ω' finomításra (Ω-nak) úgy, hogy Ω' parametrizálja f. Most mozagssuk a Besicovitch halmazunk az alábbi térben $\mathbb{R}^{M+1} := \{(x,t) : x \in \mathbb{R}^M, t \in \mathbb{R}\}$ Ha $(\alpha, z) \in \Omega'$, akkor legyen $\overline{T}(\alpha, z) \subseteq \mathbb{R}^{M+1}$ egy (diszkretizált) egyenes ami tartlamazza a $(x(\alpha), 0)$ és $(x(\alpha) + (z - i_{\alpha,z}), 1)$-t, amelynek t változója a következő tartományban mozog $|t| \lessapprox 1$. Minden $z \in P$, esetén $\overline{\mathbf{T}}(z) := \{\overline{T}(\alpha, z) : (\alpha, z) \in \Omega'\}$. Legyen $\overline{Y}(\overline{T}(\alpha, z))$ amelynek elemei azon (y_1, t) elemekből álló amelyek a $\overline{T}(\alpha, z)$-hez tartoznak úgy, hogy y_1 megjelen a (25)-n bal oldalán. Szerkesztés alapján, $\overline{Y}$ olyan árnyék amelynek a sűrűsége 1 $\overline{\mathbf{T}}(z)$-n. Könnyen belátható, hogy $|t-1| \approx 1$ minden $(x,t) \in \overline{Y}(\overline{T}(\alpha, z))$.

Lemma 3.13. *$\overline{\mathbf{T}}(z)$ egyenesek d-kollekciója minden $z \in P$ esetén.*

Bizonyítás. Legyen z rögzített. Mivel $\overline{T}(\alpha, z)$ irányát $i_{\alpha,z}$ határozza meg,ezért elég igazolni, hogy

$$\#(\{\alpha \in A : (\alpha, z) \in \Omega'; i_{\alpha,c} \in B(x,\theta)\}) \lessapprox (N\theta)^{d-1}$$

minden $B(x,\theta)$ gömbre. Másrészt, szerkesztés alaján E'-re igaz, hogy $\#(E' \cap B(x,r)) \lessapprox (Nr)^d$. Mivel Ω' parametrizálja f, ezért a lemmát igazoltuk □

Ennek a lemmának az alapján és mivel $K(d+1, d')$ teljesül:

Lemma 3.14. *Ha $z \in P$ rögzített. Akkor létezik $\overline{E}(z) \subset \mathbb{R}^{M+1}$ úgy, hogy az $\overline{Y}'(\overline{T}(\alpha, z)) := \overline{Y}(\overline{T}(\alpha, z)) \cap \overline{E}(z)$ árnyék telített legyen $\overline{\mathbf{T}}(z)$-n, és $\mu_{\overline{Y}', \overline{\mathbf{T}}(z)} \lessapprox N^{d+1-d'}$ $\overline{E}(z)$-n.*

Bizonyítás. Legyen $\overline{E}(z) := \{(x,t) \in \mathbb{R}^{M+1} : \mu_{\overline{Y}', \overline{\mathbf{T}}(z)}(x,t) \lessapprox N^{C\varepsilon} N^{d+1-d'}\}$ ahol C egy konstans . Most tegyük fel, hogy $\overline{Y}'$ nem teljesül. Ekkor $\overline{Y}''(\overline{T}(\alpha, z)) := \overline{Y}(\overline{T}(\alpha, z)) \backslash \overline{E}(z)$árnyék telített kell legyen $\overline{\mathbf{T}}(z)$-n. Ekkor a $\overline{\mathbf{T}}'(z)$ egy finomítása a $\overline{\mathbf{T}}(z)$-nek, úgy, hogy a $\overline{Y}''$-nak az sűrűsége 1 $\overline{\mathbf{T}}'(z)$-n. Mivel $K(d+1, d')$ teljesül ezért

$$\# \left(\bigcup \overline{Y}''(\overline{\mathbf{T}}'(z)) \right) \gtrapprox N^{-d} \#(\overline{\mathbf{T}}'(z)) N^{d'} \approx N^{d'-d} \#(\overline{\mathbf{T}}(z)).$$

Szerkesztés alapján, $\bigcup \overline{Y}''(\overline{\mathbf{T}}'(z))$ kifut E-ből . Az E értelmezése alapján láthatjuk, hogy

$$\left\| \sum_{\overline{T}(\alpha,z)\in\overline{\mathbf{T}}(z)} \chi_{\overline{T}(\alpha,z)} \right\|_1 \gtrapprox N^{C\varepsilon} N^{d+1-d'} N^{d'-d} \#(\overline{\mathbf{T}}(z)).$$

Másfelől, a bal oldal világos, hogy $\lessapprox N\#(\overline{\mathbf{T}}(z))$. Tehát egy ellentmondásba ütköztünk ha C elég nagy. □

Legyen $z \in P$ rögzített, és legyen $\overline{Y}'$ ugyanaz mint az előbbi lemmában. A számláló függvény: $\mu_{\overline{Y}',\overline{\mathbf{T}}(z)}$ az l^1-beli normája $\lessapprox N\#(\overline{\mathbf{T}}(z))$ és l^∞-beli normája $\lessapprox N^{d+1-d'}$. A Hölder alapján a z összegzése alapján a következő alsó korlátot kapjuk

$$\sum_{z\in P} \|\mu_{\overline{Y}',\overline{\mathbf{T}}(z)}\|_{l^2}^2 \lessapprox N^{d+2-d'}\#(\Omega')$$

. Ahoz, hogy (21)-t belássuk, elég (26) alapjánt ha kapunk egy alsó korlátot:

$$\sum_{z\in P} \|\mu_{\overline{Y}',\overline{\mathbf{T}}(z)}\|_{l^2}^2 \gtrapprox N^{1-2d}\#(\Omega')^2. \tag{27}$$

Kifejtve (27)a baloldalt

$$\sum_{x\in P} \sum_{t\in N^{-1}\mathbf{Z}} \sum_{(\alpha,z),(\alpha',z)\in\Omega'} \chi_{\overline{Y}'(\overline{T}(\alpha,z))}(x,t)\chi_{\overline{Y}'(\overline{T}(\alpha',z))}(x,t).$$

Tegyük fel, hogy $(\alpha,z)\in\Omega'$, $x_1\in Y'(T_1(\alpha))$, $x_2\in Y'(T_2(\alpha))$ olyanok, hogy x_1, z, és x_2 lényegileg kollineárisak. Ekkor létezik egy$t\in N^{-1}\mathbf{Z}$ úgy, hogy $(x_1,t)\in\overline{Y}'(\overline{T}(\alpha,z))$. Ennek a fényében az előbbi összeg korlátozható

$$\sum_{(x_1,z,x_2)\in\Sigma} \sum_{\alpha,\alpha'\in A} \chi_{\Omega'}(\alpha,z)\chi_{\Omega'}(\alpha',z)\chi_{Y'(T_1(\alpha))\cap Y'(T_1(\alpha'))}(x_1)\chi_{Y'(T_2(\alpha))\cap Y'(T_2(\alpha'))}(x_2),$$

ahol

$$\Sigma := \{(x_1,z,x_2)\in E\times P\times E : x_1,z,x_2 \text{ lényegileg kollineáris}; |x_1-z|,|x_2-z|\approx 1\}.$$

Az előbbi összeg egyszerűsíthető

$$\sum_{(x_1,z,x_2)\in\Sigma} [\sum_{\alpha\in A} \chi_{\Omega'}(\alpha,z)\chi_{Y'(T_1(\alpha))}(x_1)\chi_{Y'(T_2(\alpha))}(x_2)]^2.$$

A Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség alapján,

$$[\sum_{(x_1,z,x_2)\in\Sigma} \sum_{\alpha\in A} \chi_{\Omega'}(\alpha,z)\chi_{Y'(T_1(\alpha))}(x_1)\chi_{Y'(T_2(\alpha))}(x_2)]^2/\#(\Sigma).$$

A Σ értelmezése alapján világos , hogy $\#(\Sigma) \approx N\#(E)^2$. Tehát, rögzített $(\alpha, z) \in \Omega'$ láthatjuk a szögpont értelmezése alapján, hogy

$$\sum_{x_1,x_2:(x_1,z,x_2)\in\Sigma} \chi_{Y'(T_1(\alpha))}(x_1)\chi_{Y'(T_2(\alpha))}(x_2) \approx N.$$

Tehát a bal oldal a (27)-ban a következő korláttal rendelkezik $N\#(E)^{-2}(\sum_{(\alpha,z)\in\Omega'} 1)^2$, tehát beláttuk az állítást ha figyelembe vesszük a a (20) . □

4. Kapcsolatok más matematikai ágakkal

Nem ismeretes például, hogy van-e olyan nullmértékű halmaz, amely minden ellipszisnek tartalmazza egy eltoltját. Amint látjuk, a Kakeya-problémával kapcsolatos kérdések kifogyhatatlanok, és minden bizonnyal még sokáig lesznek inspiráló hatással a geometriai mértékelmélet fejlődésére.

A kérdés (természetes variánsaival együtt) már önamgában is nagyon érdekes érdekes, de jelentősége messze túlmutat a geometriai mértékelméleten. C. Fefferman, A.Cordoba, J. Bourgain és T. Tao dolgozataikban igen mély (és Fields -medálokhoz is hozzásegítő) eredményei alapján kiderült, hogy az ($\mathbf{L}^p$) Harmonikus analízis több alapvető kérdése("Megszorítási probléma gömb-multiplierekről", "Bochner- Riesz probléma") parciális differenciálegyenleti ("Lokális simitás" n-dimenziós hullámegyenletek megoldásainak kezdetiérték-függvény L^p-Szoboljev normával való becslése), valamint analitikus számelméleti (Montgomery-sejtés Dirichlet-sorok becsléséről) kérdések szorosan kapcsolódnak ehhez az elemi geometriai mértékelméleti problémához.

A természetes variánsokon(pl. egységszakaszok helyett körök) kivül is vannak persze szorosan kapcsolódó fontos geometriai mértékelméleti problémák is. Ilyen például Falconer távolsághalmaz sejtése("A sík egy legalább egy dimenziós halmazának pontjai között fellépő távolságok halmaza 1 dimenziós.") és Furstenberg egy problémája("Mekkora lehet egy olyan síkbeli halmaz Hausdorff dimenzíója amelyhez minden irányban van olyan egyenes amely a halmazt egy legalább fél Hasudorff dimenziósban metszi?").

Visszatérve az eredeti problémára R.O. Davies 1971-ben bebizonyította, hogy $n = 2$ esetén a válasz pozitív. Viszont $n \geq 3$ esetén a probléma megoldatlan,a legjobb dimenzió becslések igen messze vannak a sejtett n-től: Bourgain 1991-ben bebizonyította, hogy $\mathbb{R}^3$-ban a dimenzió legalább $\frac{7}{3}$, ezt Wolff 1995-ben $\frac{5}{2}$-re javította, N. Katz, T.Tao, I. Laba 2000-ben ezt $\frac{5}{2}+\varepsilon$-ra javította, egy meglehetősen hosszú dolgozatban.(legalábbis Minkowski dimenzióra ami néha nagyobb mint a Hausdorff dimenzió). Magasabb dimenzióban Bourgain és Wolff $\frac{n+1}{2} + \varepsilon_n$ és $\frac{n+2}{2}$-t bizonyítottak.

A témavezőnek vannak eredményei, melyek meglepő, mérték illetve dimenzió bizonyos geometriai tulajdonságoktól való függetlenségre utaló konstrukciokról szólnak.

Egy érdekes és megoldatlan kérdés az is, hogy vajon van-e cső-mérték szerinti nullmértékű Besicovitch halmaz.(Egy halmaz cső - mértékét(tube-measure) úgy kapjuk meg, hogy a halmazt lefedjük (minden lehetséges módon) csövekkel, összeadjuk a csövek keresztmetszetének területét és képezzük az infimumot) Csörnyei Wisewellel közös eredménye szerint a cső- mérték szerint mérhetők halmazok csak a nulla vagy teljes cső- mértékűek.

Hivatkozások

[1] L. Miklós, *Valós függvénytan*, Egyetemi Jegyzet, 1995 Budapest.

[2] P. Mattila, *Geometric of sets and measures in euclidean spaces*, Cambridge University Press, New York, 2000.

[3] J. Bourgain, *Besicovitch-type maximal operators and applications to Fourier analysis*, Geom. and Funct. Anal. **22** (1991), 147–187.

[4] J. Bourgain, *On the dimension of Kakeya sets and related maximal inequalities*, Geom. Funct. Anal. **9** (1999), no. 2, 256–282.

[5] J. Bourgain, *Harmonic analysis and combinatorics: How much may they contribute to each other?*, Mathematics: Frontiers and perspectives, IMU/Amer. Math. Society 2000, 13–32.

[6] A. Cordoba *The Kakeya maximal functions and the spherical summation operators* Amer. J. Math. **99** (1977) 1–22

[7] S. Drury, *L^p estimates for the x-ray transform*, Ill. J. Math. **27** (1983), 125–129.

[8] N. Katz, T. Tao *Bounds on arithmetic progressions and applications to the Kakeya conjecture*, Math. Res. Let. **6** (1999) 625–630.

[9] N. Katz, I. Łaba, T. Tao, *An improved bound on the Minkowski dimension of Besicovitch sets in $\mathbb{R}^3$*, to appear, Annals of Math.

[10] I. Łaba, T. Tao: *An x-ray estimate in $\mathbb{R}^n$*, to appear, Revista Iberoamericana.

[11] I. Łaba, T. Tao: *An improved bound for the Minkowski dimension of Besicovitch sets in medium dimension*, to appear, GAFA.

[12] I. Ruzsa, *Sums of finite sets*, Number Theory: New York Seminar; Springer-Verlag (1996), D.V. Chudnovsky, G.V. Chudnovsky and M.B. Nathanson editors.

[13] T. Tao, *From rotating needles to stability of waves: emerging connections between combinatorics, analysis, and PDE*, to appear, Notices Amer. Math. Soc.

[14] T. Tao, A. Vargas, L. Vega, *A bilinear approach to the restriction and Kakeya conjectures*, J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), pp. 967–1000.

[15] T. Wolff, *An improved bound for Kakeya type maximal functions*, Revista Mat. Iberoamericana. **11** (1995). 651–674.

[16] T. H. Wolff, *A mixed norm estimate for the x-ray transform*, Revista Mat. Iberoamericana. **14** (1998), 561-600.

[17] T. Wolff, *Recent work connected with the Kakeya problem*, Prospects in mathematics (Princeton, NJ, 1996), 129–162, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.