XII. Erdélyi Tudományos Diákköri Konferencia

MÁTRIX CERUZÁK

BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM KOLOZSVÁR

MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

Irányító tanár:
Szántó Csaba-Lehel
Algebra tanszék

Egyetemista:
Ferencz Ildikó
Matematika-Informatika szak
3. év

2009. május 15-17

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Mátrix ceruzák

Ebben a részben láthatunk egy bevezetőt a mátrix ceruzákról általánosan, bővebben megismerkedhetjük a lineáris mátrix ceruzákat, ezek tulajdonságait, ahogyan azt Gantmacher is összefoglalta. [3]
Legyen A_0, A_1, ..., A_r $m*n$-es komplex mátrixok sorozata, ahol $A_r \neq O_{m*n}$ akkor a

$$L(\lambda) = \sum_{i=0}^{r} \lambda^i A_i$$

komplex számok halmazán definiált, mátrix együtthatós függvényt mátrix ceruzának hívjuk.

Ebben a dolgozatban egy partikuláris esettel foglalkozunk:
Legyen A és B két $m*n$-es komplex mátrix, $\lambda \in \mathbb{C}$, akkor a lineáris mátrix ceruza alakja:

$$A + \lambda B$$

Annak céljából, hogy átalakíthassuk a mátrix ceruzánkat egy szigorúan kanonikus alakra transzformációkat kell végezzünk (ahogyan azt a Jordan féle kanonikus alak esetén is láthattuk). Így a A_1, B_1, A_2, B_2 komplex mátrixok esetén keressünk nem szinguláris (determinánsa nem nulla, vagyis invertálható) P , Q m illetve n dimenziós mátrixokat úgy hogy:

$$\begin{cases} PA_1Q = A_2 \\ PB_1Q = B_2 \end{cases}$$

amiből a $A_1 + \lambda B_1$ és $A_2 + \lambda B_2$ mátrix ceruzák bevezetésével kialakíthatjuk a következő egyenletet

$$P(A_1 + \lambda B_1)Q = A_2 + \lambda B_2$$

1. Definíció. *Két $m*n$ dimenziós mátrix ceruza $A_1 + \lambda B_1$ és $A_2 + \lambda B_2$ szigorúan ekvivalensek, ha léteziknek a P és Q nem szinguláris mátrixok, m illetve n dimenzióval, amelyek nem függnek λ-tól és kielégítik a következő egyenletet*

$$P(A_1 + \lambda B_1)Q = A_2 + \lambda B_2$$

Ennek az ekvivalencia relációnak jelölésére használjuk a $\sim$ jelet.

1. Megjegyzés. *Ne tévesszük össze a mátrix ceruzákra vonatkozó ekvivalenciát valamint a szigorú ekvivalenciát. Az ekvivalencia önmagában nem feltételezi, hogy a P és Q mátrixok legyenek függetlenek a paramétertől. A továbbiakban minden ekvivalenciát szigorú értelemben használunk.*

Ezen ekvivalencia következik a már bemutatott λ-mátrixok ekvivalenciájából. Mivel ekvivalens mátrix ceruzákról beszélünk a mátrixceruzákat osztályokba sorolhatjuk. Így minden ekvivalenciaosztályhoz pontosan egy kanonikus mátrix tartozik. E mellett a mátrix ceruzákat osztályozhatjuk szingularitásuk szempontjából is.

2. Definíció. *Egy $m*n$ dimenziós mátrix ceruza $A + \lambda B$ reguláris, ha*

[1.] A és B négyzetes mátrixok

[2.] $\det(A+\lambda B)\neq 0$

3. Definíció. *Egy $m*n$ dimenziós mátrix ceruza $A+\lambda B$ szinguláris, ha $m\neq n$ vagy* $\det(A+\lambda B)=0$.

1.1. Reguláris mátrix ceruzák

1. Tétel. *Legyen két mátrix ceruza: $A+\lambda B$ és $A_1+\lambda B_1$, úgy, hogy $m=n$ és* $\det(B)\neq 0$ *valamint* $\det(B_1)\neq 0$. *Ekkor a két mátrix ceruza szigorúan ekvivalens akkor és csak akkor, ha a mátrixok ugyanazon elemi osztókkal rendelkeznek $\mathbb{C}$-ben.*

Ebben az esetben a két mátrix ceruza reguláris, mivel ez egy speciális esete a reguláris mátrix polinomoknak λ-ban, de léteznek olyan mátrix ceruzák, amelyek nem ilyen alakúak. Az általunk bevezetett értelmezése a regularitásnak egy kiterjesztése ennek. Lássunk egy példát, amely segítségével megbizonyosodhatunk, hogy erre a definicióra az előző tétel nem helytálló. Úgy választottuk meg a B és B_1 mátrixokat, hogy azok determinánsa 0 legyen.

$$A+\lambda B=\begin{bmatrix}2&1&3\\3&2&5\\3&2&6\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}1&1&2\\1&1&2\\1&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+\lambda&1+\lambda&3+2\lambda\\3+\lambda&2+\lambda&5+2\lambda\\3+\lambda&2+\lambda&6+3\lambda\end{bmatrix}$$

Tehát

- az $1*1$-es minorok determinánsai relatív prímek
- a determinánsa az első $2*2$-es minornak: $4+\lambda^2+4\lambda-3-\lambda-3\lambda-\lambda^2=1$ így a legnagyobb közös osztó is 1 kell legyen
- a determináns az egész mátrixra: $1+\lambda$

$$A_1+\lambda B_1=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&1\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+\lambda&1+\lambda&1+2\lambda\\1+\lambda&2+\lambda&5+\lambda\\1+\lambda&1+\lambda&6+\lambda\end{bmatrix}$$

Tehát

- az $1*1$-es minorok determinánsai relatív prímek
- a $2*2$ minorokat, ha kiszámoljuk észrevehetjük, hogy ezek relatív prímek
- a determináns az egész mátrixra: $1+\lambda$

Tehát mindkét mátrix ceruzának egy elemi osztója van az pedig a $1+\lambda$. Ha igaz lenne a tétel, akkor a két mátrix szigorúan ekvivalens lenne, de B és B_1 rangjai különböző nagyságúak. Ami ellentmond a mátrix ceruzák szigorú ekvivalenciájának.

Lássuk, hogyan is tudjuk kijavítani a tételt úgy, hogy bármilyen reguláris ceruzára igaz legyen.

Bevezetünk egy újabb fogalmat, mégpedig a végtelen osztóját egy mátrix ceruzának. Legyen λ és μ komplex számok, amelyekkel meghatározzuk a következő homogén függvényt:

$$\Delta(\lambda,\mu)=|\mu A+\lambda B|$$

Legyen $D_k(\lambda,\mu)$ a szokásos legnagyobb közös osztója a $k*k$ nagyságú minoroknak. Így definiáljuk még a következő függvényeket is analógan a λ-mátrixoknál bevezetett ismeretekhez ($\forall k<n$):

$$i_1(\lambda,\mu)=\frac{D_n(\lambda,\mu)}{D_{n-1}(\lambda,\mu)}$$

$$i_2(\lambda,\mu) = \frac{D_{n-1}(\lambda,\mu)}{D_{n-2}(\lambda,\mu)}$$
$$...$$
$$i_k(\lambda,\mu) = \frac{D_{n-k}(\lambda,\mu)}{D_{n-k-1}(\lambda,\mu)}$$

Így megkaphatjuk az elemi osztókat a $\mu A+\lambda B$ mátrix ceruzára. Jelöljük ezt $e_\alpha(\lambda,\mu)$-vel $(\alpha = 1,2,...)$. Ha $\mu = 1$ akkor megkapjuk az elemi osztóit az $A+\lambda B$-re. Fordítva ha ismerjük $A+\lambda B$-re a $e_\alpha(\lambda)$ elemi osztókat és azok q hatványát, akkor megkaphatjuk az elemi osztóit $\mu A+\lambda B$-re

$$e_\alpha(\lambda,\mu) = \mu^q e_\alpha(\frac{\lambda}{\mu})$$

eltekintve a μ^q elemi osztóktól. μ^q elemi osztók akkor és csakis akkor léteznek ha $\det(B) = 0$ és ezeket hívjuk a végtelen elemi osztóknak.
Ha $A+\lambda B$ és $A_1+\lambda B_1$ szigorúan ekvivalensek akkor a $\mu A+\lambda B$ és $\mu A_1+\lambda B_1$ is szigorúan ekvivalensek lesznek (nem csak a véges, hanem a végtelen elemi osztók is meg fognal egyezni).
Legyen $A+\lambda B$ és $A_1+\lambda B_1$ két reguláris mátrix ceruza, melyeknek megegyeznek az elemi osztóik. Bevezetve a homogén paramétereket megkapjuk: $\mu A+\lambda B$ és $\mu A_1+\lambda B_1$ mátrixokat. Vegyük a következő transzformációkat:

$$\lambda = \alpha_1\widetilde{\lambda} + \alpha_2\widetilde{\mu}$$
$$\mu = \beta_1\widetilde{\lambda} + \beta_2\widetilde{\mu}$$

úgy, hogy $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$. (ellenben az egyenletrendszer determinánsa 0 lenne)
Így a mátrixok a következő alakúak: $\widetilde{\mu}\widetilde{A}+\widetilde{\lambda}\widetilde{B}$ és $\widetilde{\mu}\widetilde{A_1}+\widetilde{\lambda}\widetilde{B_1}$, ahol $\widetilde{B} = \beta_1 A+\alpha_1 B$, $\widetilde{B_1} = \beta_1 A_1+\alpha_1 B_1$, $\widetilde{A} = \beta_2 A+\alpha_2 B$, $\widetilde{A_1} = \beta_2 A_1+\alpha_2 B_1$.
Úgy választjuk meg az α_1 és β_1 elemeket, hogy $det(\widetilde{B}) \neq 0$ és $det(\widetilde{B1}) \neq 0$. A 1. tétel alapján $\Rightarrow$ $\widetilde{\mu}\widetilde{A}+\widetilde{\lambda}\widetilde{B}$ és $\widetilde{A_1}+\widetilde{\lambda}\widetilde{B_1}$ szigorúan ekvivalensek $\Rightarrow$ $\mu A+\lambda B$ és $A_1+\lambda B_1$ szigorúan ekvivalensek ($\Rightarrow$ $A+\lambda B$ és $A_1+\lambda B_1$ szigorúan ekvivalensek).

Így a következő tételhez jutottunk, ami általánosítása a 1. tételnek:

2. Tétel. *Két reguláris mátrix ceruza $A+\lambda B$ és $A_1+\lambda B_2$ szigorúan ekvivalens akkor és csakis akkor, ha ugyanazon elemi oszóik vannak.*

Mint láthattuk a példában a véges elemi osztók megegyeznek, de a végtelen elemi osztók különböznek. Az első ceruzának egy végtelen elemi osztója van: μ^2, a másodiknak két végtelen elemi osztója van: (μ,μ). Ezt megfigyelhetjük, ha kiszámoljuk a megfelelő $i_k(\lambda,\mu)$ elemeket.
Az első mátrixra: $(1, 1, \mu^2(\mu+\lambda))$.
Az második mátrixra: $(1, \mu, \mu(\mu+\lambda))$.

Legyen most $A+\lambda B$ egy bármilyen reguláris mátrix ceruza. Ekkor biztosan létezik egy $c \in \mathbb{C}$ úgy, hogy $det(A+cB) \neq 0$.
Legyen $A_1+(\lambda-c)B = A+cB$ ahol $A_1 = A+cB$. Mivel a c értékét úgy választottuk meg, hogy $det(A+cB) \neq 0$, ezért $det(A_1) \neq 0 \Rightarrow \exists A_1^{-1} \Rightarrow A_1(I_n+(\lambda-c)A_1^{-1}B)$ alakot hozhatjuk ki, ahol $A_1^{-1}B = \{J_0, J_1\}$ kvázidiagonális normálformában írva a mátrixot. J_0 egy nilpotens Jordan mátrix, $det(J_1) \neq 0$. Legyen n_1 a J_0 mátrix nagysága, n_2 a J_1 mátrix nagysága $\Rightarrow$

$$\{I_{n_1} - cJ_0 + \lambda J_0, I_{n2} - cJ_1 + \lambda J_1\}$$

Vizsgáljuk meg külön egyik, majd másik blokkot.

1. J_0 nilpotens és Jordan alakú $\Rightarrow det(I_{n_1} - cJ_0) \neq 0 \Rightarrow$ szorozzunk balról $(I_{n_1} - cJ_0)^{-1}$-vel $\Rightarrow$ $(I_{n_1} - cJ_0)^{-1}|(I_{n_1} - cJ_0 + \lambda J_0) = I_{n_1} + \lambda(I_{n_1} - cJ_0)^{-1}J_0$. J_0 nilpotens $\Rightarrow \exists l \in \mathbb{N}^*$ úgy, hogy $J_0^l = 0_{n_1} \Rightarrow ((I_{n_1} - cJ_0)^{-1}J_0)^l = 0_{n_1} \Rightarrow (I_{n_1} - cJ_0)^{-1}J_0$ nilpotens mátrix $\Rightarrow$

$$I_{n_1} + \widehat{\lambda J_0} = \{N^{(u_1)}, N^{(u_2)}, ..., N^{(u_s)}\}$$

ahol $N^{(u)} = I^{(u)} + \lambda H^{(u)}$, $H^{(u)}$ egy $u * u$ nagyságú mátrix,

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

2. $det(J_1) \neq 0 \Rightarrow (I_{n_2} - cJ_1 + \lambda J_1)J_1^{-1} = J_1^{-1} + (-c + \lambda)I_{n_2} = J + \lambda I_{n_2}$ ahol J normál formában van.

3. Tétel. *Minden reguláris $A + \lambda B$ mátrix ceruza redukálható egy szigorúan ekvivalens kanonikus sávmátrix formára:*

$$\{N^{(u_1)}, N^{(u_2)}, ..., N^{(u_s)}, J + \lambda I_{n_2}\}$$

ahol az első s diagonális blokk megfelel a végtelen elemi osztóknak: $\mu^{(u_1)}, \mu^{(u_2)}, ..., \mu^{(u_s)}$-nak és a normálformája az utolsó diagonális blokknak $J + \lambda J_{n_2}$ pontosan meghatározott a véges elemi osztók által.

1.2. Szinguláris mátrix ceruzák

Legyn $A+\lambda B$ egy $m*n$-es szinguláris mátrix ceruza. Az $A+\lambda B$ rangja legyen r. Mivel $m \neq n$ tudjuk, hogy $r < n$ vagy $r < m$. Vegyük azt az esetet, amikor $r < n$, vagyis, hogy az oszlopok lineárisan függőek. Ebből következik, hogy a

$$(A + \lambda B)x = 0$$

egyenletnek létezik nem nulla megoldása. A lehetséges nem nulla megoldás függ az $A+\lambda B$ oszlopaitól és λ-tól:

$$x(\lambda) = x_0 - \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 - ... + (-1)^{(\varepsilon)} \lambda^\varepsilon x_\varepsilon \, , \, x_\varepsilon \neq 0$$

ahol az $x_0, x_1, ..., x_\varepsilon$ oszlopvektorok, ε egy természetes szám.

$$(A + \lambda B)x(\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} Ax_0 = 0 \\ Bx_0 - Ax_1 = 0 \\ Bx_1 - Ax_2 = 0 \\ ... \\ Bx_{\varepsilon-1} - Ax_\varepsilon = 0 \\ Bx_\varepsilon = 0 \end{cases}$$

Tekintsük ezt az egyenletrendszert mint $x_0, -x_1, ..., (-1)^\varepsilon x_\varepsilon$-ban ismeretlent. Ekkor az egyenletrendszer mátrixa:

$$M_\varepsilon = \begin{pmatrix} A & O & ... & O \\ B & A & ... & O \\ O & B & ... & O \\ ... \\ O & O & ... & B \end{pmatrix}$$

aminek $\varepsilon + 1$ mátrixokból álló oszlopa és $\varepsilon + 2$ mátrixokból álló sora van. Jelöljük a rangját ρ_ε-al. $\rho_\varepsilon < (\varepsilon + 1)n$, mivel maximálisan ennyi oszlop áll rendelkezésünkre és megoldáként nem csak a null megoldást kapjuk.

Vizsgáljuk meg az M_ε értékét különböző ε-ok esetén:

$$M_0 = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, M_1 = \begin{pmatrix} A & O \\ B & A \\ O & B \end{pmatrix}, ..., M_{\varepsilon-1} = \begin{pmatrix} A & O & ... & O \\ B & A & ... & O \\ O & B & ... & O \\ ... \\ O & O & ... & B \end{pmatrix}$$

A rangokra teljesülnie kell, hogy $\rho_0 = n$, $\rho_1 = 2n$, ..., $\rho_{\varepsilon-1} = \varepsilon n_\varepsilon$, másképp a megoldás a 0 lenne. Így az ε az a legkisebb szám, amire a $\leq$ relációból $<$ lesz a rangokra nézve.

4. Tétel. *Ha az $A + \lambda B = 0$ egyenletnek van megoldása, kiválasztva a legkisebb ε ($\varepsilon > 0$) fokszámút, akkor a mátrix ceruza szigorúan ekvivalens a*

$$\begin{pmatrix} L_\varepsilon & O \\ O & \widehat{A} + \lambda \widehat{B} \end{pmatrix}$$

mátrix ceruzával, ahol

$$L_\varepsilon = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

aminek $\varepsilon + 1$ oszlopa és ε sora van. A $\widehat{A} + \lambda \widehat{B}$ mátrix ceruza olyan, amire a $\widehat{A} + \lambda \widehat{B} = 0$ egyenletnek nincsen alacsonyabb mint ε fokú megoldása.

Bizonyítás: Három lépésben végezzük el.

1. Bebizonyítjuk, hogy az $A + \lambda B$ mátrix ceruza ekvivalens egy olyan mátrixhoz, amely

$$\begin{pmatrix} L_\varepsilon & P + \lambda F \\ O & \widehat{A} + \lambda \widehat{B} \end{pmatrix}$$

alakú, ahol $P, F, \widehat{A}, \widehat{B}$ konstans (nem függ λ-tól) négyzetes mátrixok.

$$x(\lambda) = x_0 - \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 - ... + (-1)^{(\varepsilon)} \lambda^\varepsilon x_\varepsilon$$

Innen jön a már ismert egyenletrendszer:

$$\begin{cases} Ax_0 = 0 \\ Bx_0 = Ax_1 \\ Bx_1 = Ax_2 \\ ... \\ Bx_{\varepsilon-1} = Ax_\varepsilon \\ Bx_\varepsilon = 0 \end{cases}$$

Bebizonyítjuk, hogy $Ax_1, Ax_2, ..., Ax_\varepsilon$ lineárisan függetlenek.
Reductio ad absurdum módszert használunk: feltételezzük, hogy ezen vektorok lineárisan függőek $\Rightarrow \exists k \geq 1$ úgy, hogy

$$Ax_k = \alpha_1 Ax_{k-1} + \alpha_2 Ax_{k-2} + ... + \alpha_{k-1} Ax_1$$

Felhasználva az egyenletrendszert ezt átírhatjuk a következő alakba:

$$Bx_{k-1} = \alpha_1 Bx_{k-2} + \alpha_2 Bx_{k-3} + ... + \alpha_{k-1} Bx_0$$

$$\Downarrow$$

$$B(x_{k-1} - \alpha_1 x_{k-2} + \alpha_2 x_{k-3} + ... + \alpha_{k-1} x_0) = 0$$

Legyen $y_{k-1} = x_{k-1} - \alpha_1 x_{k-2} + \alpha_2 x_{k-3} + ... + \alpha_{k-1} x_0 \Rightarrow By_{k-1} = 0$
Számoljuk ki Ay_{k-1}-t bevezetve $y_{k-2} = x_{k-2} - \alpha_1 x_{k-3} + ... + \alpha_{k-2} x_0$-t

$$Ay_{k-1} = B(x_{k-2} - \alpha_1 x_{k-3} + ... + \alpha_{k-2} x_0) = By_{k-2}$$

Hasonlóan folytatva egy ús sorozatot kapunk:

$$\begin{aligned} &y_{k-1} = x_{k-1} - \alpha_1 x_{k-2} + ... + \alpha_{k-1} x_0 \\ &y_{k-2} = x_{k-2} - \alpha_1 x_{k-3} + ... + \alpha_{k-2} x_0 \\ &y_{k-3} = x_{k-3} - \alpha_1 x_{k-4} + ... + \alpha_{k-3} x_0 \\ &... \\ &y_0 = x_0 \end{aligned}$$

és érvényes a következő egyenletrendszer:

$$\begin{cases} By_{k-1} = 0 \\ Ay_{k-1} = By_{k-2} \\ ... \\ Ay_1 = By_0 \\ Ay_0 = 0 \end{cases}$$

aminek van $k-1$-ed fokú megoldása:

$$y(\lambda) = y_{k-1} - \lambda y_{k-2} + ... + (-1)^{k-1}\lambda^{k-1}y_0,\ y_0 = x_0$$

x_0 nem lehet nulla, mivel ellenben $\frac{x(\lambda)}{\lambda}$ is megoldása lenne az egyenletnek, ami ellentmond a fokszám minimalitásának. Így viszont $k-1 < \varepsilon$, ami újból ellentmondás, tehát $Ax_1, Ax_2, ..., Ax_\varepsilon$ lineárisan függetlenek.
Most bebizonyítjuk, hogy $x_0, x_1, ..., x_\varepsilon$ is függetlenek.

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_\varepsilon x_\varepsilon = 0 \Rightarrow \ \alpha_0 Ax_0 + \alpha_1 Ax_1 + ... + \alpha_\varepsilon Ax_\varepsilon = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} Ax_0 = 0 \\ \alpha_0 Ax_0 + \alpha_1 Ax_1 + ... + \alpha_\varepsilon Ax_\varepsilon = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ \alpha_1 Ax_1 + ... + \alpha_\varepsilon Ax_\varepsilon = 0 \Rightarrow$$

mivel $Ax_1, Ax_2, ..., Ax_\varepsilon$ lineárisan függetlenek $\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_\varepsilon = 0 \Rightarrow \alpha_0 x_0 = 0$
Már láthattuk, hogy x_0 nem lehet nulla $\Rightarrow \alpha_0 = 0$
Vegyük a mátrix ceruzánkat mint egy operátort:

$$A + \lambda B : R_n \to R_m$$

Az R_n egy $\varepsilon + 1$ elemből álló részbázisa: $x_0, x_1, ..., x_\varepsilon$
Az R_m egy ε elemből álló részbázisa: $Ax_1, Ax_2, ..., Ax_\varepsilon$
Ha az új bázisban akarjuk felírni az A és B mátrixokat a következőket kapjuk:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 & * ... & * \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & * ... & * \\ ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & * ... & * \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & * ... & * \\ ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & * ... & * \end{pmatrix}$$

mivel $Ax_0 = 0$, $Ax_i\, \forall i = \overline{1, \varepsilon}$-ra pedig bázielem;

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 & * ... & * \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & * ... & * \\ ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 & * ... & * \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & * ... & * \\ ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & * ... & * \end{pmatrix}$$

mivel $Bx_0 = Ax_1$, $..., Bx_{\varepsilon-1} = Ax_\varepsilon, Bx_\varepsilon = 0$

2. Bebizonyítjuk, hogy $(\widehat{A} + \lambda\widehat{B})\widehat{x}$-nek nincs ε-nál kisebb fokszámú megoldása.

- $L_\varepsilon y = 0$ egyenletenek nincs ε-nál kisebb fokszámú nem nulla megoldása:

$$\left.\begin{array}{l} L_\varepsilon y = 0 \\ y = (y_1, y_2, ..., y_{\varepsilon+1}) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda y_1 + y_2 = 0 \\ \lambda y_2 + y_3 = 0 \\ ... \\ \lambda y_{\varepsilon-1} + y_\varepsilon = 0 \end{array}\right.$$

  ha rekurzívan kifejezzük az elemeket: $y_k = (-1)^{k-1} y_1 \lambda^{k-1}$, $k = \overline{1, \varepsilon+1}$, ami legalább ε fokú.

- Határozzuk meg

$$\begin{pmatrix} L_\varepsilon & P + \lambda F \\ O & \widehat{A} + \lambda \widehat{B} \end{pmatrix}$$

  mátrix ceruzára az egyenletrendszere mátrixát. Ha permutáljuk a sorokat, oszlopokat a következő alakot kaphatjuk, ha $k = \overline{0, \varepsilon}$:

$$M_k = \begin{pmatrix} M_k[L_\varepsilon] & M_k[D + \lambda F] \\ O & M_k[\widehat{A} + \lambda \widehat{B}] \end{pmatrix}$$

  Ha $k = \varepsilon - 1$ akkor M_k és $M_k[L_\varepsilon]$ oszlopai lineárisan függetlenek. Az $M_k[L_\varepsilon]$ egy négyzetes mátrix lesz, aminek a nagysága és egyúttal a rangja is $\varepsilon(\varepsilon+1)$. Az M_k mátrix rangja: εn. Így $M_k[\widehat{A} + \lambda \widehat{B}]$ rangja $\varepsilon(n - \varepsilon - 1)$ vagyis pont ahány oszlopa van. Tehát az oszlopai függetlenek, ami azt jelenti, hogy a $\widehat{A} + \lambda \widehat{B}$ egyenletnek nincsen ε-néle kisebb fokú megoldása.

3. Megmutatjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} L_\varepsilon & P + \lambda F \\ O & \widehat{A} + \lambda \widehat{B} \end{pmatrix}$$

áttranszformálható egy sávmátrixá. Legyenek X, Y megfelelő alakú mátrixok.

$$\begin{pmatrix} I_{\varepsilon,\varepsilon} & Y \\ O & I_{m-\varepsilon,m-\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_\varepsilon & P + \lambda F \\ O & \widehat{A} + \lambda \widehat{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{\varepsilon+1,\varepsilon+1} & -X \\ O & I_{m-\varepsilon-1,m-\varepsilon-1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} L_\varepsilon & P + \lambda F + Y\widehat{A} + \lambda Y \widehat{B} \\ O & \widehat{A} + \lambda \widehat{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{\varepsilon+1,\varepsilon+1} & -X \\ O & I_{m-\varepsilon-1,m-\varepsilon-1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} L_\varepsilon & P + \lambda F + Y(\widehat{A} + \lambda \widehat{B}) - L_\varepsilon X \\ O & \widehat{A} + \lambda \widehat{B} \end{pmatrix}$$

Megmutatjuk, hogy X és Y-t meg tudjuk választani úgy, hogy teljesítsék a következő egyenlőséget:

$$L_\varepsilon X = D + \lambda F + Y(\widehat{A} + \lambda \widehat{B})$$

Használjuk a következő jelöléseket:
$D = (d_{ik})$, $F = (f_{ik})$, $X = (x_{jk})$ $i = \overline{1, \varepsilon}$, $k = \overline{1, n - \varepsilon - 1}$, $j = \overline{1, \varepsilon + 1}$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_\varepsilon \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \widehat{A} = (a_1, a_2, ..., a_{n-\varepsilon-1}) \\ \\ \widehat{B} = (b_1, b_2, ..., b_{n-\varepsilon-1}) \end{array}$$

k-adik oszlop szerinti kifejtés ($k = \overline{1, n - \varepsilon - 1}$):

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda x_{2k} + \lambda x_{1k} = d_{1k} + \lambda f_{1k} + y_1(a_k + \lambda b_k) \\ \lambda x_{3k} + \lambda x_{2k} = d_{2k} + \lambda f_{2k} + y_2(a_k + \lambda b_k) \\ ... \\ \lambda x_{\varepsilon+1k} + x_{\varepsilon k} = d_{\varepsilon k} + \lambda f_{\varepsilon k} + \lambda y_\varepsilon(a_k + \lambda b_k) \end{array}\right.$$

Az egymás utáni egyenletek bal oldalában észrevehető, hogy az egyikből a szabadtag megegyezik a másikban az ismeretlen melletti együtthatóval. Ugyanezek a jobb oldalon is meg kell egyezzenek.

$$\Rightarrow \begin{cases} f_{2k} - d_{1k} = y_1(a_k - y_2 b_k) \\ f_{3k} - d_{2k} = y_2(a_k - y_3 b_k) \\ ... \\ f_{\varepsilon k} - d_{\varepsilon-1k} = y_{\varepsilon-1}(a_k - y_\varepsilon b_k) \end{cases}$$

Ha ezek teljesülnek akkor X meghatározható.
Vizsgáljuk meg, hogy az egyenletrendszernek van-e megoldása $\forall d_{ik}, f_{ik}$-ra.
Az ismeretlenek legyenek: $y_1, -y_2, y_3, -y_4, ...$
Az egyenletrendszer mátrixa:

$$\begin{pmatrix} \widehat{A} & \widehat{B} & O & ... & O & O \\ O & \widehat{A} & \widehat{B} & ... & O & O \\ ... \\ O & O & O & ... & \widehat{A} & \widehat{B} \end{pmatrix}$$

Ennek $\varepsilon - 1$ mátrix sora van és ε mátrix oszlopa. Transzponálva:

$$\begin{pmatrix} \widehat{A} & O & ... & O \\ \widehat{B} & \widehat{A} & ... & O \\ O & \widehat{B} & ... & O \\ ... \\ O & O & ... & \widehat{A} \\ O & O & ... & \widehat{B} \end{pmatrix}$$

Ez pontosan az $M_{\varepsilon-2}$ mátrix az $\widehat{A} + \lambda\widehat{B}$ mátrix ceruzára. Ennek a rangja $(\varepsilon - 1)(n - \varepsilon - 1)$. Így az egyenlterendszer rangja megegyezik az egyenletek számával, ezért az egyenleterendszer megoldható, bármilyen szabadtagokra megadható az Y mátrix.

1.3. Szinguláris mátrix ceruzák kanonikus alakja

Legyen $A + \lambda B$ egy bármilyen szinguláris $m * n$-es mátrix ceruza.

I. eset: Feltételezzük, hogy a sorok/oszlopok között nem lehet felírni olyan függőséget, amely csak konstansoktól függ.
Tegyük fel, hogy $r < n$, tehát az mátrix ceruza oszlopai lineárisan függőek, tehát az $(A+\lambda B)x = 0$-nak van 0-tól különböző megoldása, aminek a foka ε_1 ($\varepsilon_1 > 0$ a kikötés miatt)
A 4. tétel alapján a mátrix ceruza

$$\begin{pmatrix} L_{\varepsilon_1} & O \\ O & A_1 + \lambda B_1 \end{pmatrix}$$

alakra hozható. Az $A_1 + \lambda B_1$ egy újabb mátrix ceruza, amelyre megkereshetjük a $(A_1 + \lambda B_1)x = 0$ egyenlet minimális fokú megoldását. Legyen ennek a foka ε_2, amire igaz, hogy $\varepsilon_2 >= \varepsilon_1 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} L_{\varepsilon_1} & O & O \\ O & L_{\varepsilon_2} & O \\ O & O & A_1 + \lambda B_1 \end{pmatrix}$$

Ezt folytathatjuk amíg $A_p + \lambda B_p$ oszlopai lineárisan függetlenné nem válnak, vagy teljesen ki nem esik a mátrix ceruza. Így a kapott mátrix

$$\begin{pmatrix} L_{\varepsilon_1} & O & O & ... & O \\ O & L_{\varepsilon_2} & O & ... & O \\ O & O & L_{\varepsilon_3} & ... & O \\ ... & & & & \\ O & O & O & ... & A_p + \lambda B_p \end{pmatrix}$$

úgy, hogy fennálljon: $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \varepsilon_3 \leq ... \leq \varepsilon_p$. Ugyanezen eljárást el lehet végezni sorokra is, transzponálás segítségével, jelölve most a fokokat η_i-vel, addig amíg az $A_0 + \lambda B_0$ reguláris mátrix ceruza nem lesz:

$$\begin{pmatrix} L_{\varepsilon_1} & O & O & ... & O & O & O & ... & O & O \\ O & L_{\varepsilon_2} & O & ... & O & O & O & ... & O & O \\ O & O & L_{\varepsilon_3} & ... & O & O & O & ... & O & O \\ ... & & & & & & & & & \\ O & O & O & ... & L_{\varepsilon_p} & O & O & ... & O & O \\ O & O & O & ... & O & L^T_{\eta_1} & O & ... & O & O \\ O & O & O & ... & O & O & L^T_{\eta_2} & ... & O & O \\ ... & & & & & & & & & \\ O & O & O & ... & O & O & O & ... & L^T_{\eta_q} & O \\ O & O & O & ... & O & O & O & ... & O & A_0 + \lambda B_0 \end{pmatrix}$$

Fennáll:

$$0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \varepsilon_3 \leq ... \leq \varepsilon_p$$

$$0 < \eta_1 \leq \eta_2 \leq \eta_3 \leq ... \leq \eta_q$$

II. eset: Feltételezzük, hogy a sorok/oszlopok között a függőségek csak konstansoktól függ.
Az egyenlet: $(A + \lambda B)x = 0$. Jelöljük g-vel a konstans, független megoldások számát.
A mátrix ceruzát operátorként használva:

$$A + \lambda B : R_n \rightarrow R_m$$

bázistranszformáció segítségével a következő mátrixot kapjuk:

$$\widetilde{A} + \lambda \widetilde{B} = (O_{m,g}, \widetilde{A_1} + \lambda \widetilde{B_1})$$

Hasonlóan, ha most a mátrix ceruza transzponáltjával dolgozunk, jelöljük h-val a konstans, független megoldások számát az ekvivalens mátrix:

$$\begin{pmatrix} O_{h,g} & O \\ O & A^0 + \lambda B^0 \end{pmatrix}$$

Ekkor azt mondhatjuk, hogy

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = ... = \varepsilon_g = 0$$

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = ... = \eta_h = 0$$

Az $A^0 + \lambda B^0$ mátrix már az előbbi formában van.

$$\Downarrow$$

Átalakítható a következő alakba:

$$(O_{h,g}, L_{\varepsilon_{g+1}}, L_{\varepsilon_{g+2}}, ..., L_{\varepsilon_p}, L^T_{\eta_{h+1}}, L^T_{\eta_{h+2}}, ..., L^T_{\eta_q}, A_0 + \lambda B_0)$$

A $A_0 + \lambda B_0$ mátrix ceruza reguláris, ami kanonikus formába hozható:

$$(N^{(u_1)}, N^{(u_2)}, ..., N^{(u_s)}, J + \lambda I)$$

ahol J Jordan mátrix, $N^{(u)} = I^{(u)} + H^{(u)}$, H egy $u * u$ nagyságú mátrix, aminek a fődiagonálisa feletti elemek 1-esek, a többi 0.

Következtetésképpen egy mátrix ceruza kanonikus alakja:

$$(O_{h,g}, L_{\varepsilon_{g+1}}, L_{\varepsilon_{g+2}}, ..., L_{\varepsilon_p}, L^T_{\eta_{h+1}}, L^T_{\eta_{h+2}}, ..., L^T_{\eta_q}, N^{(u_1)}, N^{(u_2)}, ..., N^{(u_s)}, J + \lambda I)$$

1.4. Minimális indexek mátrix ceruzára

Legyen az $A+\lambda B$ mátrix ceruza, $(A+\lambda B)x = 0$ a hozzá rendelt egyenlet. Vegyünk k darab megoldását ennek az egyenletnek: x_1, x_2 , ... , x_k.
Azt mondjuk, hogy ezek lineárisan függetlenek, ha a belőlük képezett mátrix rangja k.

$$X = \begin{pmatrix} x_1, x_2 , ..., x_k \end{pmatrix} \Rightarrow rang(X) = k$$

Ha függőek, akkor létezik k darab polinom $p_1(\lambda)$, $p_2(\lambda)$, ... , $p_k(\lambda)$ úgy, hogy nem mind nullpolinom és

$$p_1(\lambda)x_1 + p_2(\lambda)x_2 + ... + p_k(\lambda)p_k \equiv 0$$

Válasszunk ki egy megoldást $x_1(\lambda) \neq 0$, aminek a legkisebb a fokszáma: ε_1
Válasszunk ki egy másik megoldást $x_2(\lambda) \neq 0$, ami lineárisan független $x_1(\lambda)$-hez viszonyítva és a legkisebb a fokszáma: $\varepsilon_2 \Rightarrow \varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$
Folytatva ezt a kiválasztást, maximálisan n darab lineárisan független megoldást válaszhatunk ki, így a kiválasztás véges számú lépésből áll. Ekkor megkapjuk a megoldások egy úgynezevett fundamentális sorozatát:

$$x_1(\lambda), x_2(\lambda), ..., x_p(\lambda)$$
$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq ... \leq \varepsilon_p$$

Általában ez a sorozat nem egylértelműen meghatározható, azonban két különböző fundamentális sorozatra a fokok sorozata megegyezik.
Lássuk miért is van ez így.
Legyen két különböző fundamentális sorozat. Tegyük fel, hogy különböző fokok tartoznak hozzájuk:

$$x_1(\lambda), x_2(\lambda), ..., x_p(\lambda) \qquad \widetilde{x_1}(\lambda), \widetilde{x_2}(\lambda), ..., \widetilde{x_p}(\lambda)$$

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq ... \leq \varepsilon_p \qquad \widetilde{\varepsilon}_1 \leq \widetilde{\varepsilon}_2 \leq ... \leq \widetilde{\varepsilon}_p$$

Tegyük fel, hogy:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = ... = \varepsilon_{n_1} < \varepsilon_{n_1+1} = ... = \varepsilon_{n_2} < ...$$
$$\widetilde{\varepsilon}_1 = \widetilde{\varepsilon}_2 = ... = \widetilde{\varepsilon}_{\widetilde{n_1}} < \widetilde{\varepsilon}_{\widetilde{n_1}+1} = ... = \widetilde{\varepsilon}_{\widetilde{n_2}} < ...$$

Nyilvánvaló, hogy $\varepsilon_1 = \widetilde{\varepsilon}_1$.

$\forall\, \widetilde{x}_i(\lambda)$, $i = \overline{1, \widetilde{n}_1}$ lineáris kombinációja $x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda)$, ..., $x_{n_1}(\lambda)$-nek, máskülönben $x_{n_1+1}(\lambda)$ helyettesíthető lenne $x_i(\lambda)$-val, mivel kisebb a fokszáma.

Hasonlóan $x_i(\lambda)$ is lineáris kombinációja $\widetilde{x}_1(\lambda)$, $\widetilde{x}_2(\lambda)$, ..., $\widetilde{x}_{\widetilde{n_1}}(\lambda)$-nek.

Így $n_1 = \widetilde{n_1}$, $\varepsilon_{n_1+1} = \widetilde{\varepsilon}_{\widetilde{n_1}}$ ...

$\forall\, x_k(\lambda)$ megoldás meghatároz egy lineáris függőséget (ε_k fokút) az $A + \lambda B$ mátrix ceruza oszlopai között($k = \overline{1, p}$).
Ezért a ε_1, ε_2 , ..., ε_p elemeket **oszlopra vonatkozó minimális indexeinek** nevezzük a $A + \lambda B$ mátrix ceruzára nézve.
Bevezethetőek a mátrix ceruza transzponáltjára a η_1, η_2 , ..., η_q elemek. Ezen elemeket **sorra vonatkozó minimális indexeinek** nevezzük a $A + \lambda B$ mátrix ceruzára nézve.

1. Tulajdonság. *Szigorúan ekvivalens mátrix ceruzáknak megegyeznek a minimális indexeik.*

Bizonyítás: $A + \lambda B$ és $P(A + \lambda B)Q$ mátrix ceruzák. P és Q nem szinguláris konstans mátrixok.
$(A + \lambda B)x = 0 \Rightarrow P(A + \lambda B)QQ^{-1}x = 0$
Jelöljük $z := Q^{-1}x \Rightarrow P(A + \lambda B)Qz = 0$
Tehát minden x megoldása $(A+\lambda B)x = 0$ egyenletnek beszorozva Q^{-1}-el megadja a $P(A+\lambda B)Qz = 0$ egy megolsását, nem változtatva annak a fokán.

Legyen a következő kvázidiagonális mátrix:

$$(O_{h,g}, L_{\varepsilon_{g+1}}, L_{\varepsilon_{g+2}}, ..., L_{\varepsilon_p}, L^T_{\eta_{h+1}}, L^T_{\eta_{h+2}}, ..., L^T_{\eta_q}, A_0 + \lambda B_0)$$

2. Megjegyzés. *A teljes indexek sorozata oszlopra (sorra) egy kvázidiagonális mátrix esetén megkapható mint egyesítése a megfelelő diagonális blokkok indexeinek.*

L_ε esetén egy indexe van: ε oszlopra, sorai lineárisan függetenek.
L^T_η esetén egy indexe van: η sorra, oszlopai lineárisan függetenek.

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Oszlopra a minimális indexek: } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = ... = \varepsilon_g = 0,\ \varepsilon_{g+1}, ..., \varepsilon_p \\ \text{Sorra a minimális indexek: } \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = ... = \eta_h = 0,\ \eta_{h+1}, ..., \eta_q \end{cases}$$

L_ε-ra nincsenek elemi osztók.

$$L_\varepsilon = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

A legnagyobb minorok: 1, λ^ε, amelyek közös osztója 1.
Ugyanezt figyelhetjük meg L^T_η-re is.

3. Megjegyzés. *Az elemi osztói a mátrix ceruzának megfelelnek a $A_0 + \lambda B_0$ elemi osztóival. A kanonikus formája egy mátrix ceruzának teljesen meghatározott a vele szingorúan ekvivalens mátrix ceruza minimális sor és oszlop indexei valamint az elemi osztói által.*

5. Tétel. *Két bármilyen $m * n$-es mátrix ceruza $A + \lambda B$ és $A_1 + \lambda B_1$ akkor és csakis akkor szigorúan ekvivalens, ha ugyanazok a minimális indexeik és elemi osztóik (véges és végtelen)*

Példa: Legyen egy $A + \lambda B$ mátrix ceruza, amire tudjuk a következő adatokat: $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_3 = 2$, $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = 0$, $\eta_3 = 2$, az elemi osztók: $\lambda^2, (\lambda + 2)^2, \mu^3$

A szerkesztés:

- Mivel az oszlop indexek között egy null index van, a sor indexek között pedig kettő, a mátrixban lesz egy $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ blokk.
- $\varepsilon_2 = 1$ eredményez egy $L_2 = \begin{pmatrix} \lambda\ 1 \end{pmatrix}$ $1 * 2$-es blokkot.
- $\varepsilon_3 = 2$ eredményez egy $L_2 = \begin{pmatrix} \lambda\ 1\ 0 \\ 0\ \lambda\ 1 \end{pmatrix}$ $2 * 3$-es blokkot.
- $\eta_3 = 2$ eredményez egy $L_2^T = \begin{pmatrix} \lambda\ 0 \\ 1\ \lambda \\ 0\ 1 \end{pmatrix}$ $3 * 2$-es blokkot.
- A λ^2 egy véges elemi osztó, ami egy $2*2$-es Jordan blokkot eredményez λ sajátértékkel $J + \lambda I_2 = \begin{pmatrix} \lambda\ 1 \\ 0\ \lambda \end{pmatrix}$
- A $(\lambda + 2)^2$ egy véges elemi osztó,ami egy $2 * 2$-es Jordan blokkot eredményez $\lambda + 2$ sajátértékkel $J + \lambda I_2 = \begin{pmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ 0 & \lambda + 2 \end{pmatrix}$
- A μ^3 egy végtelen elemi osztó, ami egy $3 * 3$ nagyságú blokkot eredményez $N^{(3)} = \begin{pmatrix} 1\ \lambda\ 0 \\ 0\ 1\ \lambda \\ 0\ 0\ 1 \end{pmatrix}$

A kanonikus alak:

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & & & & & & & \\ & \begin{bmatrix} \lambda\ 1 \end{bmatrix} & & & & & & \\ & & \begin{bmatrix} \lambda\ 1\ 0 \\ 0\ \lambda\ 1 \end{bmatrix} & & & & & \\ & & & \begin{bmatrix} \lambda\ 0 \\ 1\ \lambda \\ 0\ 1 \end{bmatrix} & & & & \\ & & & & \begin{bmatrix} 1\ \lambda\ 0 \\ 0\ 1\ \lambda \\ 0\ 0\ 1 \end{bmatrix} & & & \\ & & & & & \begin{bmatrix} \lambda\ 1 \\ 0\ \lambda \end{bmatrix} & & \\ & & & & & & \begin{bmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ 0 & \lambda + 2 \end{bmatrix} & \end{array} \right\|$$

2. fejezet

Numerikus algoritmusok

Ezen fejezetben bemutatásra kerülnek a P. Van Dooren [2] által 1979 bevezetett algoritmusok mátrix ceruzákra, amelyek napjainkban is elfogadottak, mivel mérvadó újítást nem tudtak kifejleszteni. Ezen algoritmusok implementálását Matlabban végeztem el, melyekről rövid információkat a függelékben olvashatunk. A dolgozathoz tartozik az 5 algoritmus csatolva.
Az előző fejezetben bezetett kanonikus formáját egy mátrix ceruzának **Kronecker kanonikus alaknak** nevezzük. Ehhez kötődően a minimális sorindexeket/minimális oszlopindexeket pedig **Kronecker sor/oszlop indexeknek** nevezzük. Az elnevezés onnan származik, hogy Kronecker volt az aki bevezette ezt a kanonikus alakot szinguláris ceruzákra.
Ebben a fejezetben a kanonikus alak formája apró változtatásokkal szerepel, de ezen változtatások meglátjuk, hogy nem mérvadóak. A célunk, hogy bemutassuk, hogy milyen numerikus módszerekkel lehet megkapni ezt az alakot bármilyen mátrix ceruza esetén. Ez a probléma egy általánosítása a már bemutatott sajátérték problémának a $\lambda I - A$ mátrix ceruzára. Ha ismertek az A mátrix sajátértékei a Jordan struktúra meghatározása egyszerűbb. Erre egy ismert algoritmus a Kublanovskaya algoritmusa (ami később javítva volt Golub és Wilkinson által). Hasonlóan ha egy reguláris mátrix ceruzára ismertek a sajátértékek egy szimpla általánosítása ennek az algorimusnak megfelelő stabilitású lesz. Ezt ki lehet bővíteni egy szinguláris mátrixra is. Sok algorimus bizonyult instabilnak és komplexitásuk szempontjából sem voltak elég hatékonyak, a pontatlan (hibatagok) számítások jelenléte miatt.
A sajátértékek meghatározására használható algoritmusok a már említett QR (Schur dekompozíció) és QZ (általánosított Schur dekompozíció) algoritmusok.

Vezessünk be újabb jelöléseket, elnevezéseket:

- $A^* = \overline{A^T}$ - az A mátrix konjugált transzponáltja
- A^P - az A mátrix második diagonálisra vonatkozó transzponáltja
- Legyen A egy $m * n$-es mátrix, U, V $m * n$-es unitér mátrixok. Akkor:
  $U^*A = \begin{bmatrix} A_r \\ \hline O \end{bmatrix}$ jelölést használjuk "sor sűrítés" esetén, amikor A_r egy olyan mátrix amelynek sorai lineárisan függetlenek és ρ-val jelöljük sorainak számát.

  $AV = \begin{bmatrix} A_c \mid O \end{bmatrix}$ jelölést használjuk "oszlop sűrítés" esetén, amikor A_c egy olyan mátrix amelynek oszlopai lineárisan függetlenek és ρ-val jelöljük oszlopainak számát.
  Tehát az A_r és A_c mátrixok sorra/olszopra maximális ranggal rendelkeznek.
  $\Rightarrow A_r$-nek létezik jobb inverze: A_r^+, A_c-nek létezik bal inverze: A_c^+ úgy, hogy

  $$A_r A_r^+ = I_s = A_c^+ A_c$$

- "Teljes rang" elnevezést használjuk négyzetes invertálható mátrixokra. Egy lehetséges módja, hogy ilyen mátrixokat előállítsunk az úgynevezett szinguláris értékek szerinti felbontás (SVD). Ez a módszer az a következő felbontást végzi el az $A\, m * n$-es mátrixra: $A = U\Sigma V$, ahol

1. U és V $m*m$ illetve $n*n$ nagyságú unitér mátrixok.
2. Σ egy $m*n$-es mátrix

$$\Sigma = \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_\rho & O \\ \hline O & O \end{array}\right] \quad \Sigma_p = diag\{\sigma_1, ..., \sigma_\rho\}$$

úgy, hogy $\sigma_i \in \mathbb{R}_+ \, \forall (i = \overline{1,\rho})$ telesíti, hogy $\sigma_1 \geq \sigma_1 ... \geq \sigma_\rho > 0$

- A mátrix ceruza ebben a fejezetben használt általános alakja: $A + \lambda B$, kanonikus kvázidiagonális alakja pedig:

$$diag\{L_{\varepsilon_1}, L_{\varepsilon_2}, \ldots, L_{\varepsilon_p}, L^P_{\eta_1}, L^P_{\eta_2}, \ldots, L^P_{\eta_q}, \lambda N - I, \lambda I - J\}$$

ahol

1. $L_\mu = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & ... & 0 & 0 \\ ... & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda & -1 \end{pmatrix}$ ami $\mu * (\mu + 1)$ nagyságú
2. $L^P_\mu = \begin{pmatrix} -1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & ... & 0 & 0 \\ ... & & & & \\ 0 & 0 & ... & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ami $(\mu + 1) * \mu$ nagyságú
3. N-Nilpotens Jordan mátrix
4. J-Jordan mátrix kanonikus alakja

$\lambda I - J$ magába foglalja a véges elemi osztókat
$\lambda N - I$ magába foglalja a végtelen elemi osztókat

Láthatjuk, hogy a Kronecker indexek valamint az elemi osztók teljesen meghatározzák a kanonkus alakot, az eltérés a két ábrázolási módban (előző fejezet és a mostani) csak esetleges transzponálásban vagy előjelben különbözik. Ebben a fejezetben ezt az ábrázolási módot követjük.

- A véges elemi osztók halmazára használjuk a ”véges struktúra” (vagy Jordan információ $\lambda I - J$-re) kifejezést. A végtelen elemi osztók halmazára használjuk a ”végtelen struktúra” (vagy Jordan információ $\lambda N - J$-re) kifejezést. A Kronecker indexek halmazán a ”szinguláris struktúra” kifejezést értjük. Ezen három struktúra teljesen meghatároz egy bármilyen mátrix ceruzát.

2.1. Kublanovskaya algoritmusa

Kublanovskaya a $\lambda I - A$ alakú mátrixok Jordan információinak kiszámítására készített algoritmust, amikor ismertek A-ra a sajátértékek.
$\lambda I - A = (\lambda - \alpha)I - (A - \alpha I)$ egyenletben a konstans tag $(A - \alpha I)$. Világos, hogy $\lambda I - A$-nak elemi osztója α ha $A - \alpha I$ szinguláris. A ν_j-vel jelöljük a nullity$(A - \alpha I)^j$ (a mátrix nullterének a dimenziója) értéket $j = \overline{1,l}$, ahol ν_j nem változik tovább $j > l$-re.

1. Algoritmus - lást függelék

A ν_j $j = \overline{1,l}$ értékeket a következő képlet alapján kaphatjuk meg:

$$\nu_j = \sum_{i=1}^{j} s_i$$

Magyarázat:
$\rightarrow$ Az algoritmusban a $\lambda I - A$ mátrix átalakul úgynevezett lépcsős mátrixá.
Az 1. lépés: a szinguláris értékfelbontás:

$$\begin{aligned} &A_{j,j} = U_j \Sigma_j V_j \\ &rang(A_{j,j}) = rang(\Sigma_j) \\ &nullity \rightarrow s_j \end{aligned}$$

Az s_j meghatározza, hogy hány olyan vektor van, ami kielégíti a $A_{j,j}x = 0$ egyeneletet, kivéve a nullvektort.

1. Tétel (Dimenzió tétel mátrixokra). *Legyen A egy $m * n$ méretű mátrix. Akkor*

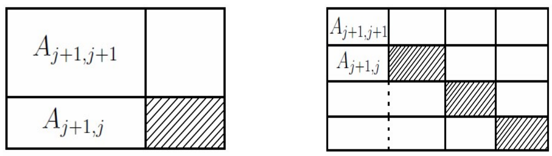
$$rang(A) + nullity(A) = s$$

Megjegyzés:
Definiálhatjuk sorra és oszlopra:
Oszlopra(n): $xA = 0$ egyenletet kell megoldjunk $\rightarrow n = r + s_o$
Sorra(m): $Ax = 0$ egyenletet kell megoldjunk $\rightarrow n = r + s_s$

n_j- oszlopok száma, r_j-rang
Mivel $n_j = r_j + s_j \Rightarrow s_j$ megadja, hogy hány oszlopot kell levágjunk $A_{j,j}$-ből, hogy teljes oszloprangja legyen.
A 2. lépés:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{j+1,j+1} & O \\ \hline A_{j+1,j} & O \end{array}\right] := V_j^* A_{j,j} V_j;$$

Ebben a részben történik az összenyomás, valamint a szétválasztás.
Mivel $A_{j+1,j+1}$-et tovább fogjuk darabolni, ehhez kell igazítani az alsó részt is:



$\uparrow$ darabolás
Mindig kisebb és kisebb mátrixokkal dolgozunk, amíg $A_{l+1,l+1}$ nem lesz teljes rangú.

A lépcsős alak:
Az algoritmus minden ciklusában találkozunk a $V_j^* A_{j,j} V_j$ szorzattal. Próbáljuk meg összesíteni ezen tényezőket egyetlen egyenletbe. Ehhez bővítsük ki a V_i-ket $n * n$-es mátrixokká és vezessük be a V mátrixot:

$$V = \prod_{j=1}^{l} \left[\begin{array}{c|c} V_j & O \\ \hline O & I \end{array}\right]$$

Kiszámoljuk V^*-ot:

$$V^* = (V_1^{'} V_2^{'} \cdot ... \cdot V_l^{'})^* = V_l^{'^*} \cdot ... \cdot V_1^{'^*} ahol\, V_i^{'} = \left[\begin{array}{c|c} V_i & O \\ \hline O & I \end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$V^*(A - \alpha I)V = (V_l^{'^*} \cdot ... \cdot V_1^{'^*})(A - \alpha I)(V_1 \cdot ... \cdot V_l)$$

A mátrixok szorzása asszociatív művelet, ezért észrevehető, hogy kialakul az algoritmusban is jelen levő szorzat:

$$V_1^* A_{1,1} V_1 = \left[\begin{array}{c|c} A_{2,2} & O \\ \hline A_{2,1} & O \end{array}\right]$$

Ha mindig a bal felső sarkot figyeljük, akkor az algoritmus lépései után az $A_{l+1,l+1}$ mátrixot kapjuk. A jobb alsó sarokba pedig A_α mátrix kerül, amiről tudjuk, hogy nilpotens és a főátlóján, valamint felette csupa 0-k találhatóak. A következő alakot kapjuk:

$$\widehat{A} = V^*(A - \alpha I)V = \left[\begin{array}{c|c} A_{l+1,l+1} & O \\ \hline X & A_\alpha \end{array}\right] \begin{array}{l} \}r_l \\ \}\Delta = \Sigma_{j=1}^{l} s_j \end{array}$$

A V mátrix unitér, tehát $VV^* = I = V^*V \Rightarrow V^*(A - \alpha I)V = V^*AV - \alpha V^*V = V^*AV - \alpha I = \widehat{A} \Rightarrow V^*AV = \widehat{A} + \alpha I$

$$V^*AV = \widehat{A} + \alpha I = \left[\begin{array}{c|c} A_{l+1,l+1} + \alpha I_{r_l} & O \\ \hline X & A_\alpha + \alpha I_\Delta \end{array}\right]$$

ahol

$$A_\alpha + \alpha I_\Delta = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \alpha I_{s_l} & O & O & O & O \\ \hline ... & ... & ... & ... & ... \\ \hline A_{l,3} & ... & \alpha I_{s_3} & O & O \\ \hline A_{l,2} & ... & A_{3,2} & \alpha I_{s_2} & O \\ \hline A_{l,1} & ... & A_{3,1} & A_{1,1} & \alpha I_{s_1} \end{array}\right]$$

- Az $A_{i+1,i}$ blokkok teljes oszlop rangúak: s_{i+1}
- Az s_i sorozat csökkenő.
- Az $A_\alpha + \alpha I_\Delta$ és A mátrixok a következő Jordan struktúrával rendelkeznek:

  $$s_j - s_{j+1} = a_j$$

  darab Jordan blokkja van, aminek a nagysága j.

Az eljárás folytatódik egy másik sajátértékre a bal felső sarokban levő mátrixra.

2.2. Reguláris ceruzák

Ebben a részben egy bármilyen reguláris ceruzára $\lambda B - A$ ($n * n$ nagyságú) szeretnénk algoritmust adni, amely egy α sajátértékre megadja a kívánt információkat, hogy megszerkeszthassük a kanonikus alakját. Mielőtt rátérnénk az algoritmusra térjünk rá egy pár lépésére a könnyebb megértés kedvéért. Mivel α sajátérték, a $\lambda B - A = (\lambda - \alpha)B - (A - \alpha B)$ kifejtésben az $A - \alpha B$ szinguláris. Az egyszerűség kedvéért vezessük be a következő jelöléseket

$$\begin{aligned} \lambda' &= \lambda - \alpha \\ B_{1,1} &= B \\ A_{1,1} &= A - \alpha \end{aligned}$$

Így a mátrix ceruzánk $\lambda' B_{1,1} - A_{1,1}$, aminek az egyik sájátértéke 0 lesz.

Az 1. lépés:
Kiszámoljuk az $A_{1,1}$ mátrixra a szinguláris értékek szerinti felbontást(SVD):

- megkapjuk a következő mátrixokat (U_a, Σ_a, V_a)
- kiszámoljuk s_1 értékét: nullity(s_1) - megadja, hogy mennyire kell összenyomjuk $A_{1,1}$-et, hogy oszlopai teljes rangúak legyenek.

Ekkor mivel V unitér

$$A_{1,1} = U_a\Sigma_a V_a \qquad A_{1,1}V_a^* = U_a\Sigma_a = \left[\ A_2 \,|\, O\ \right]$$

$$\Downarrow$$

$$(\lambda' B_{1,1} - A_{1,1})V_a^* = \left[\ \underbrace{\lambda' B_2 - A_2}_{n-s_1} \,|\, \underbrace{\lambda' B_1}_{s_1}\ \right]$$

Kiszámoljuk a B_1-re is a szinguláris értékek szerinti felbontást(SVD):

- megkapjuk a következő mátrixokat (U_b, Σ_b, V_b)
- az s_1 érték ugyanaz kell legyen, mivel másképp $\det(\lambda B - A) = 0$

Ekkor mivel U unitér

$$B_1 = U_b\Sigma_b V_b \qquad U_b^* B_1 = \Sigma_b V_b = \left[\begin{array}{c} B_{1,1} \\ \hline O \end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$U_b^*(\lambda' B_{1,1} - A_{1,1})V_a^* = \left[\ U_b^*(\lambda' B_2 - A_2) \,|\, U_b^*\lambda' B_1\ \right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \lambda' B_{2,1} - A_{2,1} & \lambda' B_{1,1} \\ \hline \underbrace{\lambda' B_{2,2} - A_{2,2}}_{n-s_1} & \underbrace{O}_{s_1} \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\, s_1 \\ \}\, n - s_1 \end{array}$$

Permutációt végzünk, hogy az alsó és felső blokkok felcserélődjenek. Ehhez létezik P_1 és Q_1 permutáció mátrixok, (amelyek magukba foglalják az eddigi átalakításokat is) úgy, hogy

$$P_1(\lambda' B_{1,1} - A_{1,1})Q_1 = \left[\begin{array}{c|c} \lambda' B_{2,2} - A_{2,2} & O \\ \hline \lambda' B_{2,1} - A_{2,1} & \lambda' B_{1,1} \end{array}\right]$$

ahol

- $B_{1,1}$ teljes rangú
- $\left[\begin{array}{c} A_{2,2} \\ \hline A_{2,1} \end{array}\right]$ teljes oszlop rangú $n - s_1$

Tehát $\lambda' B_{1,1}$ sajátértékei λ'-ben vannak, mivel $\det(\lambda' B_{1,1}) = (\lambda')^{s_1}\det B_{1,1}$ ($\det B_{1,1}$ konstans, nem függ λ'-től). Ezért csak a $\lambda' B_{2,2} - A_{2,2}$ sajátértékeivel kell foglalkozzunk. Az algoritmus, most újrakezdődik, csak ezen mátrixal dolgozva.

Az 2. lépés:

Az 1. lépést ismételjük $\lambda' B_{2,2} - A_{2,2}$ ($n2 = n - s_1$ nagyságú) reguláris mátrix ceruzára. Legyen $\widehat{P_2}$ és $\widehat{Q_2}$ ehhez a mátrixhoz tartozó áttérési mátrixok. Ekkor

$$P_2 = \left[\begin{array}{c|c} \widehat{P_2} & O \\ \hline O & I_{s_1} \end{array}\right] \qquad Q_2 = \left[\begin{array}{c|c} \widehat{Q_2} & O \\ \hline O & I_{s_1} \end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$P_2P_1(\lambda' B_{1,1} - A1,1)Q_1Q_2 = Q_2 = \left[\begin{array}{c|c} \widehat{P_2}(\lambda' B_{2,2} - A_{2,2})\widehat{Q_2} & O \\ \hline (\lambda' B_{2,1} - A_{2,1})\widehat{Q_2} & \lambda' B_{1,1} \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c} \lambda' B_{3,3} - A_{3,3} & O & O \\ \hline \lambda' B_{3,2} - A_{3,2} & \lambda' B_{2,2} & O \\ \hline \underbrace{\lambda' B_{3,1} - A_{3,1}}_{n-s_1-s_2} & \underbrace{\lambda' B_{2,1} - A_{2,1}}_{s_2} & \underbrace{\lambda' B_{1,1}}_{s_1} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \}\, s_2 \\ \}\, s_1 \end{array}$$

ahol

- $B_{2,2}$ és $B_{1,1}$ teljes rangú
- $A_{2,1}$ és $\left[\begin{array}{c} A_{3,3} \\ \hline A_{3,2} \end{array}\right]$ teljes oszlop rangú $n - s_1 - s_2$

Ezt addig ismételjük, amíg a felső bal blokk $A_{j,j}$ teljes rangú nem lesz.

2. Algoritmus - lásd függelék

Az algoritmus eredménye:

$$P(\lambda B - A)Q = P(\lambda' B_{1,1} - A_{1,1})Q = \left[\begin{array}{c|c} \lambda' B_{l+1,l+1} - A_{l+1,l+1} & O \\ \hline X & \lambda' B_\alpha - A_\alpha \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \lambda' B_{l+1,l+1} - A_{l+1,l+1} & O & ... & O & O \\ \hline \lambda' B_{l+1,l} - A_{l+1,l} & \lambda' B_{l,l} & ... & O & O \\ \hline ... & ... & ... & ... & ... \\ \hline \lambda' B_{l+1,2} - A_{l+1,2} & \lambda' B_{l,2} - A_{l,2} & ... & \lambda' B_{2,2} & O \\ \hline \underbrace{\lambda' B_{l+1,1} - A_{l+1,1}}_{n_{l+1}} & \underbrace{\lambda' B_{l,1} - A_{l,1}}_{s_l} & ... & \underbrace{\lambda' B_{2,1} - A_{2,1}}_{s_2} & \underbrace{\lambda' B_{1,1}}_{s_1} \end{array}\right] \begin{array}{l} \} n_{l+1} \\ \} s_l \\ \\ \} s_2 \\ \} s_1 \end{array}$$

ahol

1. $A_{l+1,l+1}$ teljes rangú ($s_{l+1} = 0$)
2. $B_{i,i}$ teljes rangú s_i ($i = \overline{1,l}$)
3. $A_{i,i-1}$ teljes oszlop rangú s_i ($i = \overline{2,l}$)

Ebből látható, hogy az s_i sorozat csökkenő és $s_j - s_{j+1} = a_j \geq 0$ ($j = \overline{l,1}$). A következőkben látni fogjuk, hogy ez a sorozat fontos elem a kanonikus alak kialakításakor.

1. Lemma. *Egy mátrix ceruza szigorúan ekvivalens a következő ceruzával*

$$diag\{\lambda' B_{l+1,l+1} - A_{l+1,l+1}, \lambda' B_\alpha - A_\alpha\}$$

Bizonyítás: Matematikai indukcióval végezzük, transzformációkat bevezetve, amelyek segítségével az $A_{l+1,i}$ és $B_{l+1,i}$ ($i = \overline{l,1}$) tagok O-vá tehetők.
Az l-edik lépésben vagyunk. $A_{l+1,l+1}$-nek teljes rangja van. Ebből következik, hogy létezik olyan sor transzformáció, amire $A_{l+1,l}$-et kiejthetjük ($A_{l+1,l}$ minden sora függ valamilyen $A_{l+1,l+1}$ soraitól). Hasonlóan ejthető ki a $B_l + 1, l$ mátrix a $B_{l,l}$ mátrix által.

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{c|c|c} \lambda' B_{l+1,l+1} - A_{l+1,l+1} & O & O \\ \hline \lambda' B_{l+1,l} - A_{l+1,l} & \lambda' B_{l,l} & O \\ \hline X & X & X \end{array}\right]$$

Az i-edik lépésben már kiejtettük az $\lambda' B_{l+1,j} - A_{l+1,j}$ $\forall j > i$-re elvégezhetjük a kiejtést $\lambda' B_{l+1,i} - A_{l+1,i}$ kiejtését is, használva az $A_{l+1,l+1}$ és $B_{i,i}$ tagokat.

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{c|c|c|c} \lambda' B_{l+1,l+1} - A_{l+1,l+1} & O & O & O \\ \hline O & X & O & O \\ \hline \lambda' B_{l+1,i} - A_{l+1,i} & O & \lambda' B_{i,i} & O \\ \hline X & X & X & X \end{array}\right]$$

2. Lemma. *Egy mátrix ceruzára a $\lambda' B_\alpha - A_\alpha$ rész szigorúan ekvivalens a következő ceruzával (bidiagonális blokknak hívjuk)*

$$\lambda' B_{bi} - A_{bi} = \begin{bmatrix} \lambda' B_{l,l} & O & \ldots & O & O \\ -A_{l,l-1} & \lambda' B_{l-1,l-1} & \ldots & O & O \\ \ldots & & & & \\ O & O & \ldots & -A_{21} & \lambda' B_{1,1} \end{bmatrix}$$

Bizonyítás: Matematikai indukcióval bizonyítjuk, hogy minden j oszlopban a $\lambda' B_{j,j}$ és $A_{j,j-1}$ tagon kívül minden más tag eltüntethető.
Feltételezzük, hogy l , ... , $j+1$ oszlopokra már elvégeztük a lépéseket. A $B_{j,j-1}$ elemet eltüntetjük a $B_{j-1,j-1}$ (teljes rangú) segítségével.

$$\left[\begin{array}{c|c|cc}
X & & & \\
X & & & \\
\ddots & & & \\
X & & & \\
X & \lambda' B_{j,j} & & \\
\hline
 & -A_{j,j-1} & \lambda' B_{j-1,j-1} & \\
 & X & X & \\
 & \cdots & & \ddots \\
 & X & X & \lambda' B_{1,1} \\
 & \underbrace{\qquad\quad}_{\displaystyle\uparrow\ \text{Kiejtendő rész}} & &
\end{array}\right]$$

Mivel $A_{j,j-1}$ teljes oszlop rangú ugyanolyan esetben vagyunk mint az előző lemma esetén, az alatta levő elemek mind lenullázható $A_{j,j-1}$ és $B_{j-2,j-2}$ (teljes rangú) segítségével. A megmaradó elemek $A_{i,i-1}$ és $B_{i,i}$ alakúak.

Bevezetünk új jelöléseket:

$$J_i = I_{s_i} \qquad K_i = \begin{bmatrix} I_{s_{i+1}} \\ \hline O \end{bmatrix}$$

3. Lemma. *A bidiagonális ceruza $\lambda' B_{bi} - A_{bi}$ szigorúan ekvivalens a normalizált ceruzával*

$$\lambda' B_n - A_n = \begin{bmatrix} \lambda' J_l & O & \ldots & O & O \\ -K_{l-1} & \lambda' J_{l-1} & \ldots & O & O \\ \ldots & & & & \\ O & O & \ldots & -K_1 & \lambda' J_1 \end{bmatrix}$$

Bizonyítás: $\lambda' B_{bi} - A_{bi}$-ben $B_{l,l}$ teljes (sor) rangú, tehát létezik egy oszlop transzformáció, ami J_l-re redukálja, $A_{l,l-1}$ teljes oszlop rangú, tehát létezik egy sor transzformáció, ami $A_{l,l-1}$-et redukálja K_{l-1}-re. Ezt folytatva megkaphatjuk a kívánt mátrixot.

A három lemma alapján levonhatjuk a következtetést, hogy

$$\lambda' B_{1,1} - A_{1,1} \sim \left[\begin{array}{c|c} \lambda' B_{l+1,l+1} - A_{l+1,l+1} & O \\ \hline X & \lambda' B_\alpha - A_\alpha \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{c|c} \lambda' B_{l+1,l+1} - A_{l+1,l+1} & O \\ \hline O & \lambda' B_\alpha - A_\alpha \end{array}\right]$$

valamint $\lambda' B_\alpha - A_\alpha \sim \lambda' B_{bi} - A_{bi} \sim \lambda' B_n - A_n$

2. Tétel. *Az $\{s_i\}$ indexek α sajátértékre teljesen megadják a $\lambda B - A$ mátrix ceruza véges struktúráját: $s_j - s_{j+1} = a_i$ darab $(\lambda-\alpha)^j$ $(j = \overline{1,l})$ elemi osztója.*

Bizonyítás:
$\lambda' B_{1,1} - A_{1,1}$ szingorúan ekvivalens a diag$\{\lambda' B_{l+1,+1} - A_{l+1,l+1}, \lambda' B_n - A_n\}$-el mátrix ceruzával $\Rightarrow$

$$(\lambda-\alpha)B - (A-\alpha B) \sim \left[\begin{array}{c|cccc} \lambda' B_{l+1,l+1} - A_{l+1,l+1} & & & & \\ \hline & (\lambda-\alpha)J_l & & & \\ & -K_{l-1} & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -K_1 & (\lambda-\alpha)J_1 \end{array}\right]$$

Mivel $A_{l+1,l+1}$ teljes rangú a felső ceruzának a sajátértéke nem α. A jobb alsó mátrix ceruza minden sajátértéke α és a struktúráját könnyű leolvasni. Ennek a formája valóban $\lambda I - A$ alakú, ahol A kvázi-Jordan alakú. Így $s_j - s_{j+1} = a_i$ Jordan lépcsője van, aminek a nagysága $j.(j = \overline{l,1})$

Megjegyzés
Miután az algoritmus végrehajtódott az α sajátértékre, ha ismerünk más sajátértékeket, azokra is végrehajthatjuk, a megkapott mátrix ceruzára. Így végeredményképpen a következő mátrix ceruzát kaphatjuk:

$$P(\lambda B - A)Q = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \lambda\widetilde{B} - \widetilde{A} & O & ... & O \\ \hline X & (\lambda-\alpha_k)B_{\alpha_k} - A_{\alpha_k} & ... & O \\ \hline ... & ... & ... & ... \\ \hline X & X & ... & (\lambda-\alpha_1)B_{\alpha_1} - A_{\alpha_1} \end{array}\right]$$

- A mátrix ceruzának k különböző véges sajátértéke van: α_i $(i = \overline{1,k})$
- $(\lambda-\alpha_i)B_{\alpha_i} - A_{\alpha_i}$-nek van egy speciális lépcsős szerkezete
- P és Q unitér mátrixok
- $\lambda\widetilde{B} - \widetilde{A}$-nek csak végtelen elemi osztói vannak, nincs véges sajátértéke

Ahhoz, hogy lássuk mit is kezdjünk a végtelen elemi osztók létezésével vizsgáljuk meg az elemi osztókhoz rendelt mátrixok kanonikus formáját.

Véges elemi osztókra:

$$\begin{pmatrix} \lambda-\alpha & 0 & ... & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-\alpha & ... & 0 & 0 \\ ... & & & & \\ 0 & 0 & ... & -1 & \lambda-\alpha \end{pmatrix} = (\lambda-\alpha)I - \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & & & & \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Végtelen elemi osztókra:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & ... & 0 & 0 \\ ... & & & & \\ 0 & 0 & ... & \lambda & -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & & & & \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix} - I$$

Míg a véges elemi osztók esetén az $A_{1,1}$ $(A_{j,j})$ (ranghiány) adja meg a viselkedését, a végtelen elemi osztók esetén a $B_{1,1}$ $(B_{j,j})$ (ranghiány).
Véges sajátértékhez a felbontás: $(\lambda-\alpha)B - (A-\alpha B) = \lambda' B_{1,1} - A_{1,1}$.
Végtelen sajátértékhez a felbontás: $\lambda B - A = \lambda' B_{1,1} - A_{1,1}$ ahol $\lambda = \infty$, ezért definiálhatjuk úgy is mint $B_{1,1} - \lambda' A_{1,1}$ mátrixceruza $\lambda' = 0$-ban levő sajátértékre ($\lambda = \frac{1}{\lambda'}$, ahol $\lambda = \infty \Rightarrow \lambda' = 0$). Innen

következik, hogy az algoritmus csak A és B felcserélésében különbözik.

3. Algoritmus - lásd függelék

Az algoritmus eredménye:

$$P(\lambda B - A)Q = \left[\begin{array}{c|c} \lambda B_{l+1,l+1} - A_{l+1,l+1} & O \\ \hline X & \lambda B_\infty - A_\infty \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \lambda B_{l+1,l+1} - A_{l+1,l+1} & O & \dots & O & O \\ \hline \lambda B_{l+1,l} - A_{l+1,l} & -A_{l,l} & \dots & O & O \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \lambda B_{l+1,2} - A_{l+1,2} & \lambda B_{l,2} - A_{l,2} & \dots & -A_{2,2} & O \\ \hline \underbrace{\lambda B_{l+1,1} - A_{l+1,1}}_{n_{l+1}} & \underbrace{\lambda B_{l,1} - A_{l,1}}_{s_l} & \dots & \underbrace{\lambda B_{2,1} - A_{2,1}}_{s_2} & \underbrace{-A_{1,1}}_{s_1} \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\, n_{l+1} \\ \}\, s_l \\ \\ \}\, s_2 \\ \}\, s_1 \end{array}$$

ahol

1. $B_{l+1,l+1}$ teljes rangú $(s_{l+1} = 0)$
2. $A_{i,i}$ teljes rangú s_i $(i = \overline{1,l})$
3. $B_{i,i-1}$ teljes oszlop rangú s_i $(i = \overline{2,l})$

A két algoritmus segítségével megkaphatunk egy lépcsős formát, ami szigorúan ekvivalens az eredeti mátrix ceruzával.

$$\lambda B - A \sim \left[\begin{array}{c|c} \lambda B_f - A_f & O \\ \hline X & \lambda B_\infty - A_\infty \end{array}\right]$$

Javasolt, hogy először válasszuk el a végtelen elemi osztókat a mátrix ceruzától, csak aztán határozzuk meg a véges elemi osztók struktúráját, kezdve a legkisebb sajátértékkel. Ha a sajátértékeket nem ismerjük használjuk a QZ algoritmust $\lambda B_f - A_f$-re.

3. Tétel. *Az s_i indexek teljesen megadják a $\lambda B - A$ mátrix ceruza végtelen struktúráját: $s_j - s_{j+1} = d_i$ $(j = \overline{1,l})$ darab elemi osztója van j-edik hatványon.*

Bizonyítás:
Használva a már bevezetett lemmákat könnyen észre lehet venni, hogy

$$(\lambda - \alpha)B - (A - \alpha B) \sim \left[\begin{array}{c|cccc} \lambda' B_{l+1,l+1} - A_{l+1,l+1} & & & & \\ \hline & -J_l & & & \\ & \lambda K_{l-1} & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda K_1 & -J_1 \end{array}\right]$$

- A bal felő mátrix ceruzának csak véges sajátértéke van, mivel $B_{l+1,l+1}$ teljes rangú
- A jobb alsó mátrixceruza minden sajátértéke végtelen. Permutáció segítségével át lehet alakítani kanonikus formába.

Megjegyzés
Már említettük, hogy célszerűbb először a végtelen elemi osztók mátrixát leválasztani és a fennmaradt mátrixra használni az algoritmust a véges struktúra meghatározása céljából. Figyeljük meg egy példán

keresztül ennek okát. Legyen $\lambda B - A$ egy olyan mátrix ceruza aminek egy véges sajátértéke van ($\lambda = 20$) és egy elemi osztóka a végtelenben a 15. hatványon

$$\lambda B - A = \lambda \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & & & & \\ 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & 0 & \\ \hline & & & & 1 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \hline & & & 20 \end{array}\right]$$

Ha a számításokban ε a hibatag, a mátrix ceruza átalakulhat a következő formába $\lambda(B+E)-(A+F)$. Aminek a sajátértékei:

$$|\lambda_i^{'}| \cong \varepsilon^{-\frac{1}{15}} i = \overline{1,15}$$
$$\lambda_{16}^{'} = 20 + \eta \quad |\eta| \leq 20\varepsilon$$

Egy olyan számítógépen, ahol a pontosság $\varepsilon = 10^{-15}$ a végtelen sajátérték is véges sajátértékként fog szerepelni. Ez elkerülhetetlen ha az eredeti mátrixra használjuk a QZ algoritmust, ezért először ha a végtelen struktúrát határozzuk meg ezen hiba kiküszöbölhető.
Az előző két algoritmusnak létezik duális algoritmusa is. Abban áll, hogy az oszlopsűzítést helyettesítjük sorsűrítéssel és fordítva. Mindkét esetben igaz, hogy az $s_i = \widehat{s}_i$ $(nullity(A_{i,i}))$. Nézzünk egy párhuzamos összevetést a következő táblázatban.

Algoritmus	**Duális algoritmus**
$(\lambda-\alpha)B_{1,1} - A_{1,1}$ $\Downarrow$ Az első lépés $(\lambda-\alpha)[B_2 \vert B_1] - [A_2 \vert \underbrace{\leftarrow}_{s_1}]$ $\Downarrow$ $(\lambda-\alpha)\left[\begin{array}{c\vert c} B_{2,2} & \downarrow \\ \hline B_{2,1} & B_{1,1} \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c\vert c} A_{2,2} & O \\ A_{2,1} & O \end{array}\right]$	$(\lambda-\alpha)B_{1,1} - A_{1,1}$ $\Downarrow$ Az első lépés $(\lambda-\alpha)\left[\begin{array}{c} \widehat{B}_1 \\ \hline \widehat{B}_2 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c} \downarrow \\ \hline \widehat{A}_2 \end{array}\right]\}\widehat{s}_1$ $\Downarrow$ $(\lambda-\alpha)\left[\begin{array}{c\vert c} \widehat{B}_{1,1} & \leftarrow \\ \hline \widehat{B}_{2,1} & \widehat{B}_{2,2} \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c\vert c} O & O \\ \hline \widehat{A}_{2,1} & \widehat{A}_{2,2} \end{array}\right]$

Látható, hogy a különbség csak abban áll, hogy a végső mátrix egyik a másiknak pertranszponáltja. Habár úgy láthatjuk, hogy a duális algoritmusok bevezetése nem hoz semmi újat, meg fogjuk látni, hogy szinguláris ceruza esetén fontos szerepet fognak játszani.

2.3. Szinguláris ceruzák

Láthattuk, hogy a szinguláris ceruzák kanonikus alakja komplexebb mint a reguláris ceruzáké. Ebben a részben meg szeretnénk mutatni, hogy az eddigi algoritmusok kevés változtatásával hogyan tudunk új algoritmust létrehozni ami megfelelő szinguláris ceruzák esetén is.
Figyeljük meg a kanonikus alak blokkjait:

$$[1.] \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Kronecker sor indexekre} \\ (n+1)*n \text{ nagyságú blokk}}} = \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{B_{1,1}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A_{1,1}}$$

$$[2.]\quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & ... & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & ... & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kronecker oszlop indexekre $n*(n+1)$nagyságú blokk $\quad B_{1,1} \quad A_{1,1}$

$$[3.]\quad \begin{pmatrix} \lambda-\alpha & 0 & ... & 0 & 0 \\ -1 & \lambda-\alpha & ... & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & ... & -1 & \lambda-\alpha \end{pmatrix} = (\lambda-\alpha)I - \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Véges elemi osztókra $\quad B_{1,1} = I \quad A_{1,1}$

$$[4.]\quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & ... & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & ... & \lambda & -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix} - I$$

Végtelen elemi osztókra $\quad B_{1,1} \quad A_{1,1} = I$

Vizsgáljuk meg, hogy milyen hatással vannak a reguláris ceruzákra írt algoritmusok egy-egy mátrix ceruzákra.

Vegyük először azon algoritmust, amely a végtelen elemi osztók kezelésére szolgál:

- Az algoritmus hatással van azon ceruzán, amelynek hiányos oszlop rangja van $B_{1,1}$-ben (λ az együttható). Így az 1-es és 4-es blokkokat érint.
- A duális algoritmus hatással van azon ceruzán, amelynek hiányos sor rangja van $B_{1,1}$-ben (λ az együttható). Így az 2-es és 4-es blokkokat érint.

Vegyük azon algoritmust, amely a véges elemi osztók kezelésére szolgál:

- Az algoritmus hatással van azon ceruzán, amelynek hiányos oszlop rangja van $A_{1,1}$-ben ($\lambda-\alpha$ az együttható). Így az 1-es és 3-as blokkokat érint.
- Az algoritmus hatással van azon ceruzán, amelynek hiányos sor rangja van $A_{1,1}$-ben ($\lambda-\alpha$ az együttható). Így az 2-es és 3-as blokkokat érint.

A Kronecker indexekből származó blokkokat Kronecker blokkoknak nevezzük. Ezek nem négyzetes blokkok (sor vagy oszlop ranghiánnyal rendelkeznek) így logikus, hogy az algoritmusok hatnak rájuk. Tehát az eddigi algoritmusok segítségével is megkaphatjuk a kívánt információkat. A változtatás ami szükséges abban áll, hogy nem négyzetes mátrixunk van valamint a sűrítések más-más dimenziójúak $r_j \neq s_j$.

Változtassunk először azon algoritmuson amely a végtelen struktúra meghatározására íródott.

4. Algoritmus - lásd függelék

Az algoritmus eredménye:
A megállási feltétel: $B_{j,j}$ teljes oszlop rangú ($s_j = 0, l = j-1$). A megalkotott P és Q unitér mátrixokra a következő összefüggést kapjuk:

$$P(\lambda B - A)Q = \left[\begin{array}{c|c} \lambda B_{l+1,l+1} - A_{l+1,l+1} & O \\ \hline X & \lambda\widetilde{B} - \widetilde{A} \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \lambda B_{l+1,l+1} - A_{l+1,l+1} & O & ... & O & O \\ \hline \lambda B_{l+1,l} - A_{l+1,l} & -A_{l,l} & ... & O & O \\ \hline ... & ... & ... & ... & ... \\ \hline \lambda B_{l+1,2} - A_{l+1,2} & \lambda B_{l,2} - A_{l,2} & ... & -A_{2,2} & O \\ \hline \underbrace{\lambda B_{l+1,1} - A_{l+1,1}}_{n_{l+1}} & \underbrace{\lambda B_{l,1} - A_{l,1}}_{s_l} & ... & \underbrace{\lambda B_{2,1} - A_{2,1}}_{s_2} & \underbrace{-A_{1,1}}_{s_1} \end{array}\right] \begin{array}{l} \} m_{l+1} \\ \} r_l \\ \\ \} r_2 \\ \} r_1 \end{array}$$

ahol

1. $B_{l+1,l+1}$ teljes oszlop rangú
2. $A_{i,i}$ teljes sor rangú r_i $(i = \overline{1,l})$
3. $B_{i,i-1}$ teljes oszlop rangú s_i $(i = \overline{2,l})$

Bevezetve két új sorozatot következtethetünk arra hogy

$$\begin{cases} s_i - r_i = e_i \geq 0 \quad i = \overline{1,l} \\ r_i - s_{i+1} = d_i \geq 0 \quad i = \overline{1,l} \end{cases}$$

4. Lemma. *Egy $\lambda B - A$ mátrix ceruza szigorúan ekvivalens egy ceruzával ami*

$$diag\{\lambda B_{l+1,l+1} - A_{l+1,l+1}, \lambda B_n - A_n\}$$

ahol

$$\lambda B_n - A_n = \begin{bmatrix} -J_l & & & \\ \lambda K_{l-1} & \ddots & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda K_1 & -J_1 \end{bmatrix}, \ J_i = \left[\ I_{r_i} \,|\, O\ \right], \ K_i = \begin{bmatrix} I_{s_i+1} \\ \hline O \end{bmatrix}$$

4. Tétel. *Az $\{e_i\}$ és $\{d_i\}$ indexek teljesen meghatározzák a Kronecker oszlop indexeket $\{\varepsilon_i\}$ és a végtelen elemi osztókat, amiknek a hatványa $\{\delta_i\}$.*

Bizonyítás:
Használva az előző lemmát

$$\lambda B - A \sim diag\{\lambda B_{l+1,l+1} - A_{l+1,l+1}, \lambda B_n - A_n\}$$

A $B_{l+1,l+1}$ teljes oszlop rangú tehát a ceruzának nincs végtelen elemi osztója és Kronecker oszlop indexe. Ha egy alkalmas permutációt választunk a $\lambda B_n - A_n$ egyszerűvé válik és kizárólag ezen két struktúra elemeiből áll.
Matematikai indukcióval bizonyítjuk:
Tudjuk, hogy

$$0 = s_{l+1} \leq r_l \leq s_l \leq ... \leq r_2 \leq s_2 \leq r_1 \leq s_1$$

$$\Downarrow$$

$\lambda B_n - A_n$-ben:

- minden -1-es alatt található egy λ
- minden λ jobb oldalán található egy -1

A ceruzából leválasztunk

1. d_l darab végtelen elemi osztót l fokon

2. e_l darab L_{l-1} blokkot, aminek a Kronecker oszlop indexe: $l-1$

Első lépésben $d_l = r_l$. Permutációkkal ki kell alakítsunk d_l darab végtelen elemi osztóknak megfelelő blokkot, ami $l * l$ nagyságú

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & ... & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & ... & \lambda & -1 \end{pmatrix}$$

úgy, hogy felhasználjuk J_l-et, aminek pont d_l sora van. Ennek minden sora az első sora lesz a fenti kanonikus alakú mátrixnak. Tehát minden sorhoz még szükség van $l-1$ sorra. Ezen hiányzó sorokat a J_i és K_i-ből veszük. Egy mátrix megalkotásához kerül egy sor J_l-ből valamint minden i-re J_i és K_i-ből. Így megkaphatjuk a kívánt alakokat.
Ekkor minden r_i és s_i csökken r_l-el, r_l pedig 0 lesz. λK_{l-1}-ben marad $s_l - r_l$ darab λ, ami pontosan az e_l. Most le kell válasszunk e_l darab $l * (l-1)$ nagyságú blokkot aminek az alakja

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & ... & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda & -1 \end{pmatrix}$$

így a K_{l-1}-et is felhasználtuk teljesen.
Minden r_i és s_i csökken s_l-el.

$$\left.\begin{array}{ll} s_{j+1} = s_{j+1} - r_l - s_l, & j = \overline{1, l-2} \\ s_j = s_j - r_l - s_l, & j = \overline{1, l-1} \\ r_j = r_j - s_l - r_l, & j = \overline{1, l-1} \end{array}\right\} \Rightarrow e_i, d_i \, konstansok$$

Így most eljutottunk egy kisebb mátrix ceruzához, amire teljesül

$$0 = s_l \leq r_{l-1} \leq s_{l-1} \leq ... \leq r_2 \leq s_2 \leq r_1 \leq s_1$$

Ez a ceruza kielégíti az indukciós feltételeket (redukált), így az indukciós lépés teljes.

5. Tétel. *Az $\{e_{i|i=1,...,l}\}$ és $\{d_{i|i=1,...,l}\}$ indexek meghatározzák a következő struk-túráját a $\lambda B - A$ mátrix ceruzára:*

(i) *van d_i végtelen elemi osztója i. hatványon ($i = \overline{1, l}$)*

(ii) *van e_i Kronecker blokkja: L_{i-1}, aminek a nagysága $i-1$ ($i = \overline{1, l}$)*

Lássunk egy példát:

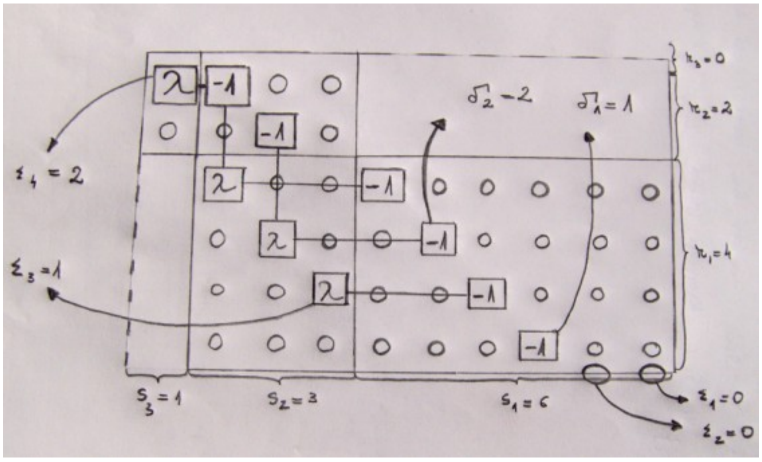
$$
\left\|\begin{array}{c|c}
\begin{array}{ccc}
\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} & & \\
 & \begin{bmatrix} \lambda+2 \end{bmatrix} & \\
 & & \begin{bmatrix} \lambda-3 & 0 \\ 1 & \lambda-3 \end{bmatrix}
\end{array} & \\
\hline
 & \begin{array}{cccc}
\begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} & & \\
 & & \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
\end{array}\right\|
$$

A jobb oldali mátrix $\lambda B_n - A_n$ alakú, az indexek pedig:

$$d_1 = 1,\ d_2 = 1,\ d_3 = 0;\ e_1 = 2,\ e_2 = 1,\ e_3 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\delta_1 = 1,\ \delta_2 = 2;\ \varepsilon_1 = 0,\ \varepsilon_2 = 0,\ \varepsilon_3 = 1,\ \varepsilon_4 = 2$$



A képen látható módon csoportosíthatjuk az elemeket és kialakíthatjuk a kanonikus alakot. Az összekapcsolt elemek egy mátrixot határoznak meg, aminek a Kronecker indexét is megjelenítettük. Azt is megfigyelhetjük, hogy az elemkiválasztás hűen tükrözi az előző bizonyítás menetét.
Változtassunk azon algoritmuson duálisán amely a végtelen struktúra meghatározására íródott.

5. Algoritmus - lásd függelék

Az algoritmus eredménye:
A megalkotott P és Q unitér mátrixokra a következő összefüggést kapjuk:

$$P(\lambda B - A)Q = \left[\begin{array}{c|c} \lambda\widehat{B} - \widehat{A} & O \\ \hline X & \lambda B_{k+1,k+1} - A_{k+1,k+1} \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} -A_{1,1} & O & \dots & O & O \\ \hline \lambda B_{2,1}-A_{2,1} & -A_{2,2} & \dots & O & O \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \lambda B_{k,1}-A_{k,1} & \lambda B_{k,2}-A_{k,2} & \dots & -A_{k,k} & O \\ \hline \underbrace{X}_{\widehat{r_1}} & \underbrace{X}_{\widehat{r_2}} & \dots & \underbrace{X}_{\widehat{r_k}} & \underbrace{\lambda B_{k+1,k+1}-A_{k+1,k+1}}_{n_{k+1}} \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\,\widehat{s_1} \\ \}\,\widehat{s_2} \\ \\ \}\,\widehat{s_k} \\ \}\,m_{k+1} \end{array}$$

ahol

1. $B_{k+1,k+1}$ teljes sor rangú
2. $A_{i,i}$ teljes oszlop rangú $\widehat{r_i}$ $(i = \overline{1,k})$
3. $B_{i,i-1}$ teljes sor rangú $\widehat{s_i}$ $(i = \overline{2,k})$

6. Tétel. *Ha egy szinguláris $\lambda B - A$ ceruzára használjuk az előző algoritmust, meghatározhatjuk a Kronecker sor indexeket $\{\eta_i\}$ és a végtelen elemi osztókat $\{\delta_i\}$:*

(i) $\widehat{d_i} = \widehat{r_i} - \widehat{s_{i+1}}$ *végtelen elemi osztók i. hatványon* $(i = \overline{1,k})$

(ii) $\widehat{e_i} = \widehat{s_i} - \widehat{r_i}$ *Kronecker blokkok:* L^P_{i-1}*, aminek a nagysága* $i-1$ $(i = \overline{1,l})$

7. Tétel. *Mindig lehetséges egy unitér transzformáció, hogy egy bármilyen mátrix ceruzát a következő formába hozzunk:*

$$P(\lambda B - A)Q = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \lambda B_\eta - A_\eta & O & O & O \\ \hline X & \lambda B_f - A_f & O & O \\ \hline X & X & \lambda B_\infty - A_\infty & O \\ \hline X & X & X & \lambda B_\varepsilon - A_\varepsilon \end{array}\right]$$

ahol

(i) $\lambda B_f - A_f$ egy négyzetes reguláris ceruza, ami a véges elemi osztókat tartalmazza $\lambda B - A$-ból

(ii) $\lambda B_\infty - A_f$ egy négyzetes reguláris ceruza, ami a végtelen elemi osztókat tartalmazza $\lambda B - A$-ból

(ii) $\lambda B_\eta - A_\eta$ és $\lambda B_\varepsilon - A_\varepsilon$ szinguláris ceruzák, amelyek a Kronecker sor és oszlop struktúrát határozzák meg

Bizonyítás:
Könnyen észrevehető, hogy a $\lambda B - A$ mátrix ceruza ekvivalens a következő alakkal(használva a 4. algortimust):

$$P(\lambda B - A)Q = \left[\begin{array}{c|c} \lambda B_{l+1,l+1} - A_{l+1,l+1} & O \\ \hline X & \lambda\widetilde{B} - \widetilde{A} \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \lambda B_{l+1,l+1} - A_{l+1,l+1} & O & \dots & O & O \\ \hline \lambda B_{l+1,l} - A_{l+1,l} & -A_{l,l} & \dots & O & O \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \lambda B_{l+1,2} - A_{l+1,2} & \lambda B_{l,2} - A_{l,2} & \dots & -A_{2,2} & O \\ \hline \underbrace{\lambda B_{l+1,1} - A_{l+1,1}}_{n_{l+1}} & \underbrace{\lambda B_{l,1} - A_{l,1}}_{s_l} & \dots & \underbrace{\lambda B_{2,1} - A_{2,1}}_{s_2} & \underbrace{-A_{1,1}}_{s_1} \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\,m_{l+1} \\ \}\,r_l \\ \\ \}\,r_2 \\ \}\,r_1 \end{array}$$

A $\lambda B_{l+1,l+1} - A_{l+1,l+1}$ két struktúra elemet tartalmaz (hiányos sor rangjuk van):

- Kronecker sor indexeket
- véges elemi osztókat

Ha erre használjuk az 5. algoritmust a következőt tudjuk felírni:

$$P_1(\lambda B_{l+1,l+1} - A_{l+1,l+1})Q_1 = \left[\begin{array}{c|c} \lambda B_\eta - A_\eta & O \\ \hline X & \lambda B_f - A_f \end{array}\right]$$

Ez az algoritmus a $\lambda\widetilde{B} - \widetilde{A}$ ceruzára a következő módon hat:

$$P_2(\lambda\widetilde{B} - \widetilde{A})Q_2 = \left[\begin{array}{c|c} \lambda B_\infty - A_\infty & O \\ \hline X & \lambda B_\varepsilon - A_\varepsilon \end{array}\right]$$

ahol a végtelen elemi osztók el vannak választva a maradék $\lambda B_\varepsilon - A_\varepsilon$ mátrixtól.

Megjegyzések:

1. Az utolsó két algoritmus azon kívül, hogy elválasztja a négy struktúrát, több belső információval is szolgál. A $\lambda B_\eta - A_\eta$ magába foglalja a Kronecker sor indexeket és így van egy speciális kanonikus alakja. A $\lambda B_f - A_f$-re tudjuk, hogy B_f invertálható. A $\lambda\widetilde{B} - \widetilde{A}$ magába foglalja a Kronecker oszlop indexeket és a végtelen elemi osztókat (szétválaszthatók). A maradék ismeretek amiket még megkaphatunk: a Jordan információkat.

2. Ha a bizonyításban megjelölt algoritmusokat használjuk a véges struktúra nem lesz lépcsős alakú, ezért alkalmazhatjuk az 1. algoritmust. Ezzel ellentétben a végtelen struktúra már lépcsős alakban szerepel.

3. Ha először használjuk a mátrix ceruzánkra az 5. algoritmust és majd csak aztán a 4. algoritmust, akkor azt kapjuk, hogy

$$P(\lambda B - A)Q = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \lambda B_\eta - A_\eta & O & O & O \\ \hline X & \lambda B_\infty - A_\infty & O & O \\ \hline X & X & \lambda B_f - A_f & O \\ \hline X & X & X & \lambda B_\varepsilon - A_\varepsilon \end{array}\right]$$

4. Ha a reguláris ceruzákra írt algoritmust használjuk szinguláris ceruzákra, akkor segítségével is meghatározhatjuk a Kronecker struktúrát együtt az α sajátértékhez rendelt struktúrával. Ha valótlan sajátértéket adunk, akkor csak a Kronecker struktúrát kapjuk meg. Numerikus szempontból ajánlott az utolsó két algoritmus, mivel nem szükséges hozzájuk ismerni a sajátértékeket, de a Kronecker struktúrát valamint a végtelen struktúrát könnyen meghatározhatjuk.
Következtetésképpen elmondhatjuk, hogy kiindulva a reguláris ceruzákra írt algoritmusból eljutottunk olyan algoritmushoz, amit minden mátrix ceruzára használhatunk és megadják a Kronecker struktúrát (sor, oszlop).

3. fejezet

Fontosabb eredmények - röviden

Nem sokkal azután, hogy megjelent cikkben a bemutatott algoritmus Wilkinson is megjelentette a cikkét [6], aminek az alapgondolata a QZ algoritmus bemutatása, kiemelve az algoritmus hibalehetőségeit.

A QZ algoritmus lényege a következő tételben áll:

1. Tétel. *Egy $A-\lambda B$ reguláris ceruza esetén, amire $Au = \lambda Bu$ sajátérték feladatnak van α_i sajátértéke, akkor $\exists$ Q, Z unitér mátrixok úgy hogy*

$$QAZ = \widetilde{A}$$
$$QBZ = \widetilde{B}$$

ahol $\widetilde{A}$ és $\widetilde{B}$ felső háromszög mátrixok amire tudjuk, hogy

$$\widetilde{a}_{i,i} = \alpha_i k_i,\ \widetilde{b}_{i,i} = k_i,\ ha\ (|\alpha_i| \leq 1)$$
$$\widetilde{a}_{i,i} = k_i,\ \widetilde{b}_{i,i} = \frac{k_i}{\alpha_i},\ ha\ (|\alpha_i| > 1)$$

Ahol $k_i \neq 0$ és α_i bármilyen rangú lehet.

Tehát ha egy $A + \lambda B$ reguláris mátrixceruzára A-t és B-t unitér transzformációkkal át tudunk alakítani felső háromszög mátrixokká akkor a sajátértékeket a következőképpen számolhatjuk ki:

1. $\lambda_i = \frac{\widetilde{a}_{i,i}}{\widetilde{b}_{i,i}}$, ha $b_{i,i} \neq 0$
2. $\lambda = \infty$, ha $b_{i,i} = 0$ és $a_{i,i} \neq 0$
3. $b_{i,i} = 0$ és $a_{i,i} = 0$ eset kizárt mivel reguláris mátrix ceruzának van.

Vizsgálta a szinguláris mátrix ceruzákra való hatását is a QZ algoritmusnak. Az tapasztalható, hogy hasonlóan kialakíthatóak az $\widehat{A}$ és $\widehat{B}$ mátrixok, amelyek felső háromszögmátrixok lesznek. A szinguláris részből viszont az származik, hogy a főátlón megjelennek $(a_{i,i}, b_{i,i}) = (0, 0)$ párok. Ezen kívül az unitér transzformációk arra is szolgálnak, hogy a nem 0 párokból származó arányok tetszőlegessé tehető, ami elrontja azon törekvésünket, hogy megkapjuk a megfelelő sajátértékeket. Ezen kívül bármilyen kicsi perturbáció (hibatag) elronthatja a mátrixok szingularitását, regularitását, ez példákkal van illusztrálva.

A szerző célja nem az volt, hogy kritizálja a QZ algoritmust, mivel az a lehető legpontosabb eredményt adja, hanem alá akarta támasztani azon ötletet, hogy mátrix ceruzák esetén mindenképpen először le kell választani a szinguláris részt és csak aztán foglalkozni a reguláris résszel. Persze a kerekítési hibák így is hozhatnak eltéréseket, nem küszöbölhetők ki.

Demmel 1995-ben kiadott cikkének a fő téma a mátrix ceruzák halmazának dimenziójára vonatkozó összefüggést megadása. Párhuzamosan ad meg két bizonyítást egy klasszikusat valamint bevezet egy új szemléletet is ami a már bemutatott algoritmusra épül.
Mielőtt rátérnénk a tételre vezessük be a következő fogalmat:

1. Definíció. *Legyen A és B egy $m * n$-es mátrixpár. Definiáljuk az $A - \lambda B$ mátrixceruza pályáját:*

$$orbit(A - \lambda B) = \{P(A - \lambda B)Q_{-1},\ ahol\ det(P)det(Q) \neq 0\}$$

Mint láthatjuk a pálya definiál egy sokaságot a $2mn$ dimenziós térben. Ebben a sokaságban minden mátrix ceruza ekvivalens az eredeti $A-\lambda B$ mátrix ceruzával. Ennek a sokaságnak a (co)dimenziójának a meghatározására szolgálnak a következő tételek.

2. Tétel. *Az $A - \lambda B$ mátrix ceruza pályájának codimenziója csakis a Kronecker struktúrától függ. A codimenziót megadhatjuk mint összege a különböző struktúra elemeinek comineziója által.*

$$c_{Teljes} = c_{Jor} + c_{Jobb} + c_{Bal} + c_{Jor,Szing} + c_{Szing}$$

Nézzük meg mit is jelentenek a tételben szereplő codimenziók:

- A Jordan struktúra codimenziója

  $$c_{Jor} = \sum_{\lambda}(q_1(\lambda) + 3q_2(\lambda) + 5q_3(\lambda) + ...)$$

  ahol $q_1(\lambda) \geq q_2(\lambda) \geq q_3(\lambda) \geq ...$ jelöli a Jordan blokkok nagyságát ami a λ sajátértékhez hoz tartozik. Az összegzésben szerepel minden λ sajátérték, kivéve a végtelen sajátérték, ha ez létezik.

- Az L szinguláris blokk codimenziója $c_{Jobb} = \sum_{j>k}(j-k-1)$, ahol az összegben szerepel minden L_j és L_k blokkpár, amire $j > k$.

- Az L^T szinguláris blokk codimenziója $c_{Bal} = \sum_{j>k}(j-k-1)$, ahol az összegben szerepel minden L_j^T és L_k^T blokkpár, amire $j > k$.

- A Jordan struktúra és a szinguláris blokkok együttes jelenlétéből származó codimenzió: $c_{Jor,Szing} =$ (a nagysága a Jordan struktúrának)(a bal és jobb blokkok száma).

- A bal és jobb szinguláris blokkok együttes jelenlétéből származó codimenzió:

  $$c_{Szing} = \sum_{j,k}(j + k + 2)$$

  ahol az összegben szerepel mindn L_j és L_k^T blokkpár.

Szántó Csaba és Horváth Alexandru ezen év januárjában megjelent cikkében [5] teljesen más szempléletben vannak bemutatva a mátrix ceruzák. Úgy tekintik ezeket mint Kronecker modulusok. Így összefüggést teremtettek a reprezentáció elmélet, a numerikus lineáris algebra valamint a mátrix elmélet között. Megadják a megfelelő megfeleltetést ezek invariánsai között. Felhasználva ezen szemléletet az előző tétel bizonyítása is egyszerűbbnek bizonyul.

4. fejezet

Függelék

1. Algoritmus

\# Kezdőértékadás, α -sajátértéke A-nak:
$j := 1$; $A_{1,1} := A - \alpha I$; $n_1 := n$;

\# Ciklus:
Amíg (igaz)

\# Szinguláris értékek szerinti felbontás végzünk $A_{j,j}$-re
Meghívjuk SVD($A_{j,j}$)-t. Az eredmény: (U_j, Σ_j, V_j)
Kiszámoljuk rang(r_j), nullity(s_j) értékeket.
Ha $s_j = 0$ akkor
$l := j - 1$;
Stop.
Vége(Ha)

\# Összesűrítjük $A_{j,j}$-t teljes oszlop r_j rangra és particionálunk

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{j+1,j+1} & O \\ \hline A_{j+1,j} & O \end{array}\right] := V_j^* A_{j,j} V_j;$$

\# Újranevezéseket és particionálást végzünk
Minden i=1-től j-1-ig egyenként elvégezzük:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{j+1,i} & A_{j,i} \end{array}\right] := A_{j,i} V_j;$$

Vége(Minden)
$n_{j+1} := r_j$;
$j := j + 1$;
\# $j + 1$-edik lépés következik

Vége(Amíg)

2. Algoritmus

\# Kezdőértékadás, α -sajátértéke A-λB-nak:
$j := 1$; $A_{1,1} := A - \alpha B$; $B_{1,1} := B\, n_1 := n$;

\# Ciklus:
Amíg (igaz)

\# Szinguláris értékek szerinti felbontás végzünk $A_{j,j}$-re
Meghívjuk SVD($A_{j,j}$)-t. Az eredmény: (U_a, Σ_a, V_a)
Kiszámoljuk rang(r_j), nullity(s_j) értékeket.
Ha $s_j = 0$ akkor
$l := j - 1$;
Stop.
Vége(Ha)

\# Összesűrítjük $A_{j,j}$-t teljes oszlop r_j rangra és ugyanezt elvégezzük $B_{j,j}$-re is.

$$\left[\; A_{j+1} \,|\, O \;\right] := A_{j,j}V_a; \qquad \left[\; B_{j+1} \,|\, B_j \;\right] := B_{j,j}V_a;$$

\# Újranevezéseket és particionálást végzünk
Minden i=1-től j-1-ig egyenként elvégezzük:

$$\left[\;\; A_{j+1,i} \mid A_{j,i} \;\right] := A_{j,i}V_a; \qquad \left[\;\; B_{j+1,i} \mid B_{j,i} \;\right] := B_{j,i}V_a;$$

Vége(Minden)

\# Szinguláris értékek szerinti felbontás végzünk A_j-re
Meghívjuk SVD(B_j)-t. Az eredmény: (U_b, Σ_b, V_b)
Kiszámoljuk rang(s_j) és U_b^* értéket.

\# Összesűrítjük B_j-t teljes sor rangra permutálunk és particionálunk

$$\left[\begin{array}{c} A_{j+1,j+1} \\ \hline A_{j+1,j} \end{array}\right] := P_b U_b^* A_{j+1}; \qquad \left[\begin{array}{c} B_{j+1,j+1} \\ \hline B_{j+1,j} \end{array}\right] := P_b U_b^* B_{j+1};$$

$$\left[\begin{array}{c} O \\ \hline B_{j,j} \end{array}\right] := P_b U_b^* B_j;$$

$n_{j+1} := n_j - s_j$;
$j := j + 1$;
\# $j + 1$-edik lépés következik

Vége(Amíg)

3. Algoritmus

\# Kezdőértékadás:
$j := 1$; $A_{1,1} := A$; $B_{1,1} := B$; $n_1 := n$;

\# Ciklus:
Amíg (igaz)

\# Szinguláris értékek szerinti felbontás végzünk $B_{j,j}$-re
Meghívjuk SVD($B_{j,j}$)-t. Az eredmény: (U_b, Σ_b, V_b)
Kiszámoljuk nullity(s_j) értéket.
Ha $s_j = 0$ akkor
$l := j - 1$;
Stop.
Vége(Ha)

\# Összesűrítjük $B_{j,j}$-t teljes oszlop rangra és ugyanezt elvégezzük $A_{j,j}$-re is / particionálás.

$$\left[\ B_{j+1} \,|\, O\ \right] := B_{j,j} V_b; \qquad \left[\ A_{j+1} \,|\, A_j\ \right] := A_{j,j} V_b;$$

\# Újranevezéseket és particionálást végzünk
Minden i=1-től j-1-ig egyenként elvégezzük:

$$\left[\ B_{j+1,i} \ | \ B_{j,i}\ \right] := B_{j,i} V_b; \qquad \left[\ A_{j+1,i} \ | \ A_{j,i}\ \right] := A_{j,i} V_b;$$

Vége(Minden)

\# Szinguláris értékek szerinti felbontás végzünk A_j-re
Meghívjuk SVD(A_j)-t. Az eredmény: (U_a, Σ_a, V_a)
Kiszámoljuk rang(s_j) és U_a^* értéket.

\# Összesűrítjük A_j-t teljes sor rangra permutálunk és particionálunk

$$\left[\frac{B_{j+1,j+1}}{B_{j+1,j}} \right] := P_a U_a^* B_{j+1}; \quad \left[\frac{A_{j+1,j+1}}{A_{j+1,j}} \right] := P_a U_a^* A_{j+1};$$

$$\left[\frac{O}{A_{j,j}} \right] := P_a U_a^* A_j;$$

$n_{j+1} := n_j - s_j$;
$j := j + 1$;
\# $j + 1$-edik lépés következik

Vége(Amíg)

4. Algoritmus

\# Kezdőértékadás:
$j := 1$; $A_{1,1} := A$; $B_{1,1} := B$; $n_1 := n$; $m_1 = m$

\# Ciklus:
Amíg (igaz)

\# Szinguláris értékek szerinti felbontás végzünk az $B_{j,j}$-re $(m_j * n_j)$
Meghívjuk SVD($B_{j,j}$)-t. Az eredmény: (U_b, Σ_b, V_b)
Kiszámoljuk nullity(s_j) értéket.
Ha $s_j = 0$ akkor
$l := j - 1$;
Stop.
Vége(Ha)

\# Összesűrítjük $B_{j,j}$-t teljes oszlop rangra és ugyanezt elvégezzük $A_{j,j}$-re is / particionálás.

$$\left[\ B_{j+1}\,|\,O\ \right] := B_{j,j}V_b; \qquad \left[\ A_{j+1}\,|\,A_j\ \right] := A_{j,j}V_b;$$

\# Újranevezéseket és particionálást végzünk
Minden i=1-től j-1-ig egyenként elvégezzük:

$$\left[\ B_{j+1,i}\ |\ B_{j,i}\ \right] := B_{j,i}V_b; \qquad \left[\ A_{j+1,i}\ |\ A_{j,i}\ \right] := A_{j,i}V_b;$$

Vége(Minden)

\# Szinguláris értékek szerinti felbontás végzünk A_j-re $(m_j * n_j)$
Meghívjuk SVD(A_j)-t. Az eredmény: (U_a, Σ_a, V_a)
Kiszámoljuk rang(r_j) és U_a^* értéket.

\# Összesűrítjük A_j-t teljes sor rangra permutálunk és particionálunk

$$\left[\begin{array}{c} B_{j+1,j+1} \\ \hline B_{j+1,j} \end{array}\right] := P_a U_a^* B_{j+1}; \qquad \left[\begin{array}{c} A_{j+1,j+1} \\ \hline A_{j+1,j} \end{array}\right] := P_a U_a^* A_{j+1};$$

$$\left[\begin{array}{c} O \\ \hline A_{j,j} \end{array}\right] := P_a U_a^* A_j;$$

$m_{j+1} := m_j - r_j$;
$n_{j+1} := n_j - s_j$;
$j := j + 1$;
\# $j + 1$-edik lépés következik

Vége(Amíg)

5. Algoritmus

Kezdőértékadás:
$j := 1$; $A_{1,1} := A$; $B_{1,1} := B$; $n_1 := n$; $m_1 = m$

Ciklus:
Amíg (igaz)

Szinguláris értékek szerinti felbontás végzünk az $B_{j,j}$-re $(m_j * n_j)$
Meghívjuk SVD($B_{j,j}$)-t. Az eredmény: (U_b, Σ_b, V_b)
Kiszámoljuk nullity($\widehat{s}_j$)(sorra) értéket és U_b^* értéket.

Ha $\widehat{s}_j = 0$ akkor
$k := j - 1$;
Stop.
Vége(Ha)

Összesűrítjük $B_{j,j}$-t teljes sor rangra és ugyanezt elvégezzük $A_{j,j}$-re is / particionálás.

$$\left[\begin{array}{c} O \\ \hline B_{j+1} \end{array}\right] := P_b U_b^* B_{j,j}; \quad \left[\begin{array}{c} A_j \\ \hline A_{j+1} \end{array}\right] := P_b U_b^* A_{j,j};$$

Újranevezéseket és particionálást végzünk
Minden i=1-től j-1-ig egyenként elvégezzük:

$$\left[\begin{array}{c} B_{j,i} \\ \hline B_{j+1,i} \end{array}\right] := P_b U_b^* B_{j,i}; \quad \left[\begin{array}{c} A_{j,i} \\ \hline A_{j+1,i} \end{array}\right] := P_b U_b^* A_{j,i};$$

Vége(Minden)

Szinguláris értékek szerinti felbontás végzünk A_j-re $(m_j * n_j)$
Meghívjuk SVD(A_j)-t. Az eredmény: (U_a, Σ_a, V_a)
Kiszámoljuk rang($\widehat{r}_j$).

Összesűrítjük A_j-t teljes oszlop rangra, permutálunk és particionálunk

$$\left[\ B_{j+1,j} | B_{j+1,j+1}\ \right] := B_{j+1} V_a; \quad \left[\ A_{j+1,j} | A_{j+1,j+1}\ \right] := A_{j+1} V_a;$$
$$\left[\ A_{j,j} | O\ \right] := A_j V_a;$$

$m_{j+1} := m_j - \widehat{s}_j$;
$n_{j+1} := n_j - \widehat{r}_j$;
$j := j + 1$;
$j + 1$-edik lépés következik

Vége(Amíg)

Az implementált algoritmusok:

1. Kubla - adott sajátértékre
2. reg1 - reguláris mátrix ceruza esetén adott sajátértékre
3. reg2 - reguláris mátrix ceruza esetén végtelen sajátérték
4. szing1 - szinguláris mátrixceruza esetén - Kronekker oszlop indexek
5. szing2 - szinguláris mátrixceruza esetén - Kronekker sor indexek

Futtatások:

1. Kubla(A,alfa)
   - A- négyzetes mátrix
   - alfa-sajátérték
2. reg1(A,B,alfa)
   - A, B négyzetes mátrix - reguláris mátrix ceruzát alkotják
   - alfa sajátérték
3. reg2(A,B)
   - A, B négyzetes mátrix - reguláris mátrix ceruzát alkotják
4. szing1(A,B)
   - A, B négyzetes mátrix - szinguláris mátrix ceruzát alkotják
5. szing2(A,B)
   - A, B négyzetes mátrix - szinguláris mátrix ceruzát alkotják

Irodalomjegyzék

[1] J.Demmel, A. Edelman: The dimension of matrices (matrix pencil) with given Jordan Kronecker canonical forms, Linear Algebra Applications 230 (1995) 61-87.

[2] P. Van Dooren: The Computation of Kronecker's Canonical Form of a Singular Pencil, Linear Algebra and Its Applications, 27 (1979), 103-140

[3] F. R. Gantmacher, Theory of Matrices, Vol. I, Chelsea, New York, 1959.

[4] C. Oara and P. Van Dooren: An improved algorithm for the computation of structural invariants of a system pencil and related geometric aspects. Systems Control Lett 30 (1997) 39-48.

[5] Csaba Szántó, Alexandru Horváth: Formulas for Kronecker invariants using representation theoretical approach, Linear Algebra and Its Applications 430 (2009), 664-673.

[6] J. H. Wilkinson: Kronecker's canonical form and the QZ algorithm, Linear Algebra and Its Applications 28 (1979), 285-303.