XII. ERDÉLYI TUDOMÁNYOS DIÁKKÖRI KONFERENCIA
2009. május 15.-17.
Kolozsvár

Dolgozat címe:

Ferde csoport algebrák reprezentációja

Témavezető:
Prof. Dr. Marcus Andrei
Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Algebra Tanszék

Szerző:
Horobeţ Emil

2009

FERDE CSOPORT ALGEBRÁK REPREZENTÁCIÓJA

HOROBEŢ EMIL

ABSTRACT. Tekintsünk egy G véges csoportot, mely hat egy A gyűrűre. Ekkor szerkesszük meg az $A *_\gamma G$ gyűrűt, melyet ferde-csoport gyűrűnek nevezünk. A dolgozatban bemutatjuk, hogy egy A algebra adott tulajdonsága átöröklődik a Γ algebrára, ha Γ-t A-ból a fenti szerkesztés által kaptuk. Ezen szerkesztés és az átöröklődő tulajdonságok segítségével kiderül, hogy néhány látszólag egymástól független algebrának sok közös vonása van. A dolgozat első felében bemutatjuk a pontos szerkesztési módot. Igazoljuk, hogy néhány általános feltétel elhagyható lesz speciális esetekben. A dolgozat második részében ismert, közhasználatú algebrákról (pl. csoport-gyűrűk, $\mathcal{M}_n(k)$ mátrix gyűrű , stb.) esetén igazoljuk, hogy ferde csoport szerkesztésből származnak. A dolgozat utolsó részében, pedig néhány átöröklődő tulajdonságot vizsgálunk meg. A felismert közös vonások tudatában indokolt lesz az $A*_\gamma G$ algebra A algebrával való jellemzésének kérdése.

.

1. FERDE CSOPORT ALGEBRÁK

1.1. **Bevezetés.** Tekintsünk egy G véges csoportot, mely hat egy A gyűrűre, amit a következő képpen fogalmazhatunk meg:

Definíció 1.1 ([7])**.** Legyen X egy halmaz és G egy csoport. Azt mondjuk, hogy G *hat* az X-re, ha $(\exists)$ $G \times X \to X$, $(g, x) \to gx$ függvény, úgy, hogy

(i) $(gh)x = g(hx)$, $(\forall)$ $g, h \in G, x \in X$;
(ii) $1x = x$, $(\forall)$ $x \in X$

Tehát ha G csoport hat egy A gyűrűre, akkor pillanatnyilag rögzítve egy $g \in G$-t, kapunk egy $\alpha_g : A \to A$, $\alpha_g(a) = ga$ függvényt, mely az A egy automorfizmusa. Tehát minden G-beli elemnek megfeleltethető egy $\alpha_g \in \mathrm{Aut}(A)$ elem.
Így értelmezhető egy $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(A)$, $\varphi(g) \mapsto \alpha_g$ függvény.

Date: Május 15, 2009.
2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 54C40, 14E20; Secondary 46E25, 20C20.
Key words and phrases. Representation Theory.

Másszóval a G csoport hat az A gyűrűre, ha $(\forall)$ $g \in G$ $(\exists)$ $\alpha_g : A \to A$ permutáció, úgy, hogy:

(i) $\alpha_g \circ \alpha_h(a) = \alpha_g(\alpha_h(a)) = \alpha_{gh}(a)$, $(\forall) g, h \in G$, $a \in A$;
(ii) $\alpha_1(a) = a$, $(\forall)$ $a \in A$

A továbbiakban legyen $U(A)$ az A invertálható elemeinek halmaza. Ekkor legyen $\gamma : G \times G \to U(A)$ egy olyan függvény, melyre teljesülnek az alabbiak:

(i) $\gamma(g, g')\gamma(gg', g'') = g(\gamma(g, g''))\gamma(g, g'g'')$, $(\forall)$ $g, g', g'' \in G$;
(ii) $\gamma(e, g) = \gamma(g, e) = 1$, $(\forall)$ $g \in G$, ahol e a G egységeleme és $1 \in A$ az A egységeleme;
(iii) $\gamma(g, g')(gg')(\lambda) = g(g')(\lambda)\gamma(g, g')$, $(\forall)$ $g, g' \in G$, $\forall \lambda \in A$.

Szerkesszük meg az $A *_\gamma G$-t vagyis A és G keresztszorzat algebráját. Ha A egy gyűrű és G egy csoport, mely hat az A-ra, akkor A és G keresztszorzata a következő képpen határozható meg:

Definíció 1.2 ([7])**.** Legyen A egy kommutatív gyűrű és G egy csoport, mely hat az A-ra, úgy, hogy $(\forall)$ $g \in G$ esetén $\alpha_g : A \to A$ automorfizmus. Ekkor az A és G *keresztszorzat algebrája* egy olyan A algebra, melynek bázisa $B = \{\alpha_g(b), g \in G, b \in A \text{ bázis } A\text{-ban}\}$, és elemei

$$\sum_{g \in G} \alpha_g(a)\alpha_g(b)$$

$r \in A, b \in B$ alakúak. Az összedás komponensenként történik, míg a szorzás a következő szabályok szerint:

(1)
$$\left(\sum_{g \in G} \alpha_g(r)\alpha_g(b)\right)\left(\sum_{h \in G} \alpha_h(s)\alpha_h(b)\right) = \sum_{g,h \in G} \gamma(g, h)\alpha_g(r)(\alpha_{hg}(s)\alpha_{gh}(b));$$

(2) $\alpha_g \lambda = \alpha_g(\lambda)\alpha_g$;
(3) $\alpha_{g_1}\alpha_{g_2} = \gamma(g_1, g_2)\alpha_{g_1 g_2}$.

Megjegyzés 1.3 ([6]). Feltételezve, hogy γ értékei az A centrumában vannak és a φ egy homomorfizmus, akkor a γ értelmezéséből kihagyható az (iii) feltétel.

Bizonyítás. Mivel φ egy homomorfizmus ezért $\varphi(gg') = \varphi(g) \circ \varphi(g')$. Tehát $\alpha_{gg'}(\lambda) = \alpha_g(\alpha_{g'}(\lambda))$. Ahonnan azonnal következik, hogy

$\gamma(g,g')\alpha_{gg'} = \gamma(g,g')\alpha_g(\alpha_{g'})$. Mivel feltételeztük, hogy $Im\gamma \subseteq Z(A)$ ezért $\gamma(g,g')\alpha_{gg'} = \alpha_g(\alpha_{g'})\gamma(g,g')$, ami pontosan a γ definíciójának az (iii) követelménye. □

Miután értelmeztük az $A*_\gamma G$ algebrát, további megkötéseket teszünk. Vizsgáljuk azt az esetet, amikor γ a triviális függvény, vagyis teljesül, hogy $(\forall)$ $g_1, g_2 \in G$ esetén $\gamma(g_1, g_2) = 1$. Ebben az esetben teljesül az, hogy φ homomorfizmus és, hogy $Im(\gamma) \subseteq Z(A)$. Ha γ a triviális függvény, akkor az $A *_\gamma G$ elemeit egyszerűen $\sum_{g\in G} \lambda_i g_i$ alakban írjuk.

Definíció 1.4 ([2])**.** Ha γ a triviális függvény , akkor az $A*_\gamma G$ algebrát *ferde-csoport algebrának* nevezzük és egyszerűen csak AG-vel jelöljük.

1.2. **A ferde csoport algebrák tulajdonságai.** A továbbiakban legyen A egy algebra és G egy véges csoport. Vizsgáljunk meg néhány összefüggést A és AG között.
Ehhez szükségünk lesz az alábbi lemmára:

Lemma 1.5 ([6])**.** *Ha $X, Y \in \mathrm{mod}(AG)$ és $t : X \to Y$ egy A-homomorfizmus, akkor a*

$$\tilde{t} : X \to Y, \tilde{t}(x) = \sum_{g\in G} g^{-1}t(gx)$$

egy AG-homomorfizmus.

Bizonyítás. Mivel a $\tilde{t}$ szerkesztéséből látszik, hogy az összeadás és szorzás tulajdonságai megmaradnak, ezért elégséges belátni, hogy $\tilde{t}(hx) = h\tilde{t}(x)$, $(\forall)$ $h \in AG$, $x \in X$.

$$\tilde{t}(hx) = \sum_{g\in G} g^{-1}t(ghx) = \sum_{g\in G} h(gh)^{-1}t(ghx)$$

Mivel, ha g végig fut a G-n, akkor gh is végigfut a G, ezért jelölve gh-t $k \in G$-vel, azt kapjuk, hogy:

$$\tilde{t}(hx) = \sum_{k\in G} hk^{-1}t(kx) = h\sum_{k\in G} k^{-1}t(kx) = h\tilde{t}(x)$$

És ezzel beláttuk, hogy $\tilde{t}$ egy AG-homomorfizmus. □

Legyenek most $X \in \mathrm{mod}(AG)$ és $Y \in \mathrm{mod}(A)$. Értelmezzük az $i_Y : Y \to AG \otimes_A Y$, $y \mapsto 1 \otimes y$ függvényt. Ekkor legyen $y \in AG \otimes_A Y$. Igaz, hogy $y = \left(\sum_{g\in G} \lambda g\right) \otimes y' = \sum_{g\in G} \lambda g \otimes \tilde{y_g}$ (mivel a szumma kihozható), ahol $\tilde{y_g}$-k a g' komponensei. Jelölve $\lambda\tilde{y_g}$-t y_g-vel, kapjuk, hogy:

$$y = \sum_{g\in G} g^{-1} \otimes y_g \tag{1.1}$$

Most, az (1.1) alapján, értelmezhető lesz a következő AG-morfizmus $p_Y : AG \otimes_A Y \to Y$,amelyre

$$p_Y(y) = p_Y\left(\sum_{g\in G} g^{-1} \otimes y_g\right) = y_e,$$

ahol $e \in G$, a G egységeleme.

A továbbiakban megvizsgáljuk a $\mathrm{Hom}_A(X, Y)$ és $\mathrm{Hom}_{AG}(X, AG \otimes_A Y)$ viszonyát. Megfogalmazható a következő tétel:

Tétel 1.6 ([6])**.** *Legyen* $X \in \mathrm{mod}(A)$ *és* $Y \in \mathrm{mod}(AG)$*. Ekkor teljesül, hogy*

$$\mathrm{Hom}_A(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{AG}(X, AG \otimes_A Y)$$

.

Bizonyítás. Szerkesszük meg a következő AG-morfizmusokat

$$\psi : \mathrm{Hom}_{AG}(X, AG \otimes_A Y) \to \mathrm{Hom}_A(X, Y)$$

$$\rho : \mathrm{Hom}_A(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{AG}(X, AG \otimes_A Y),$$

ahol $\rho(s) = \widetilde{i_Y s}$ és $\psi(f) = p_Y f$, $(\forall)s \in \mathrm{Hom}_A(X, Y)$ és $(\forall)f \in \mathrm{Hom}_{AG}(X, AG \otimes_A Y)$ esetén. Itt az $\widetilde{i_Y s}$ az az AG-morfizmus amit az (1.5) lemmában megszerkesztettünk.
Igazolni fogjuk, hogy ψ és ρ egymás inverzei.

Legyen $y \in AG \otimes_A Y$, ekkor az (1.1) alapján $y = \sum_{g\in G} g^{-1} \otimes y_g$ és legyen $h \in G$. Teljesül, hogy

$$p_Y(hy) = p_Y\left(\sum_{g\in G} hg^{-1} \otimes y_g\right) = y_g,$$

ahol g olyan G-beli elem amire pontosan $hg^{-1} = e$, vagyis $g = h$. Tehát $p_Y(hy) = y_h$.

Ez azt jelenti, hogy

$$y = \sum_{g \in G} g^{-1} \otimes y_g = \sum_{g \in G} g^{-1} \otimes p_Y(gy) \tag{1.2}$$

formában is írható. Legyen $x \in X$, $f \in \mathrm{Hom}_{AG}(X, AG \otimes_A Y)$ és most vizsgáljuk a $\rho(\widetilde{\psi(f(x))})$-t.
$(\rho\psi f)(x) = (\widetilde{i_Y \psi f})(x) = (\widetilde{i_Y p_Y f})(x) = \sum_{g \in G} g^{-1} \otimes p_Y(f(gx))$, mivel f egy AG-homomorfizmus, ezért egyenlő tovább $\sum_{g \in G} g^{-1} \otimes p_Y(gf(x))$ ami az előző észrevétel (1.2) alapján egyenlő $f(x)$-el.

Most legyen $x \in X$ és $s \in \mathrm{Hom}_A(X, Y)$, vizsgáljuk a $\psi(\rho(s(x)))$-t.
$\psi(\rho(s(x))) = p_Y(\rho(s(x))) = p_Y(\widetilde{i_Y(s(x))}) = p_Y\left(\sum_{g \in G} g^{-1} i_Y(s(gx))\right) =$
$= p_Y\left(\sum_{g \in G} g^{-1} \otimes s(gx)\right) = e^{-1} \otimes s(ex) = s(x).$
Ezzel bebizonyítottuk, hogy

$$\mathrm{Hom}_A(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}_{AG}(X, AG \otimes_A Y)$$

. □

2. Quiverek és út algebrák

2.1. **Bevezetés.**

Definíció 2.1 ([2])**.** A $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$ *quiver* egy irányított gráf, amelyben Γ_0 a csúcsok véges halmaza, a Γ_1 az irányított élek halmaza és értelmezve van két függvény:

$$s : \Gamma_1 \to \Gamma_0, s(\alpha) = i,$$
$$e : \Gamma_1 \to \Gamma_0, e(\alpha) = j,$$

ahol $\alpha \in \Gamma_1$, $\alpha : i \to j$ irányított él.

A továbbiakban definiálhatjuk az *út* fogalmát, mint $p = \alpha_n ... \alpha_1$, ahol $\alpha_i \in \Gamma_1$ és e_i legyen az i csúcsnak megfelelő triviális út.

Szerkesszünk a k-test fölött egy olyan $k\Gamma$ vektorteret, amelynek a bázisát a Γ útjai teszik ki. Ehhez értelmeznünk kell egy k-lineáris függvényt

$$f : k\Gamma \to \mathrm{End}_k(k\Gamma),$$

és elég ha értékeit megadjuk a Γ útjaiban.

$$f(e_i)(q) = \begin{cases} q, & \text{ha } e(q) = i; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$f(\alpha)(q) = \begin{cases} \alpha q, & \text{ha } e(q) = s(\alpha), \text{ ha q nem triviális;} \\ \alpha, & \text{ha } q = e_{s(\alpha)}; \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

ahol $\alpha \in \Gamma_1$ és q egy út Γ-ban.
A fentiek alapján értelmezhető a $k\Gamma$ *útalgebra*, melynek elemei
$\sigma = \sum_{i=1}^{k} k_i p_i$, ahol $k_i \in k$, p_i út.

Állítás 2.1 ([2]). *Legyen k egy test és Γ egy véges quiver. Ekkor $k\Gamma$ véges dimenziós k-algebra, akkor és csakis akkor ha Γ nem tartalmaz irányított kört.*

A továbbiakban nézzünk néhány példát.

Példa 2.2 ([2]). Legyen k egy test és Γ a következő quiver $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$. Ekkor $\{e_1, e_2, e_3, \alpha, \beta, \beta\alpha\}$ bázisa a $k\Gamma$ k-algebrának. A szorzás pedig a következő képpen történik: $e_1\alpha = 0, \alpha e1 = \alpha, \alpha\beta = 0$ és $\beta\alpha = \beta\alpha$.

2.2. **Út algebrák tulajdonságai.** A fentiek alapján

$$f(\sigma) = \sum a_i f(p_i),$$

ahol $a_i \in k$ és p_i út Γ-ban. Tehát ezek alapján felírva $f(\sum e_i) = 1$ kapunk. Ugyanakkor $e_i^2 = e_i$, $(\forall)i \in \Gamma_0$ esetén és az is igaz, hogy $e_i e_j = 0$, $(\forall)i \neq j$ esetén.
Ezeket összegezve kapjuk, hogy

$$\{e_1, e_2, ..., e_n\} \text{ egy } \textit{ortogonális idempotens} \text{ rendszer} \tag{2.1}$$

a $k\Gamma$-ban.
Ennek tudatában megfogalmazható a következő tétel.

Tétel 2.3. [2] *Legyen J a $k\Gamma$ azon ideálja, melyet a Γ_1 elemei generálnak. Ekkor igaz, hogy*

$$k\Gamma/J \simeq ke_1 \times ... \times ke_n$$

mint k-algebra.

Bizonyítás. A bizonyítás vázlatosan annyiból áll, hogy a (2.1) alapján észrevehető, hogy $\{\varepsilon_i = e_i + J | i = 1, ..., n\}$ ortogonális idempotens rendszere a $k\Gamma/J$-nek. $\square$

A fenti tétel alapján $k\Gamma/J$ félegyszerű. De az azt jelenti, hogy J a $k\Gamma$ algebra Jacobson gyöke. Az előbbi megállapítás és a (2.1) alapján megfogalmazható a következő tétel.

Tétel 2.4. [2] *Legyen k test, Γ egy quiver. Ekkor*

$$k\Gamma = (k\Gamma)e_1 \sqcup ... \sqcup (k\Gamma)e_n.$$

A fenti tételben $(k\Gamma)e_i$ projektív modulusok, hisz

$$dim_k(k\Gamma)e_i/_{Je_i} = 1$$

A későbbi szerkesztésekhez szükségünk lesz még a következő tételre.

Tétel 2.5. [2] *$(k\Gamma)e_i$ egyszerű $\Leftrightarrow$ i-ből nem indul él.*

A továbbiakban vizsgáljuk meg, hogy hogyan tudunk egy a $k\Gamma$-val izomorf mátrix albegrát szerkeszteni. Ehhez segítségül hívjuk az alábbi lemmát.

Lemma 2.6 ([1]). *Legyen k test és Γ egy véges, konex, körmentes quiver, melyben $(\forall)$ $i, j \in \Gamma_0$ esetén $j \leq i$, ha van él i és j között. Ekkor a $k\Gamma$ útalgebra izomorf az alábbi mátrix algebrával*

$$A = \begin{pmatrix} e_1(k\Gamma)e_1 & 0 & \cdots & 0 \\ e_2(k\Gamma)e_1 & e_2(k\Gamma)e_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_n(k\Gamma)e_1 & e_n(k\Gamma)e_2 & \cdots & e_n(k\Gamma)e_n \end{pmatrix}.$$

3. Ferde csoport algebrák szerkesztése

A továbbiakban belátjuk néhány közhasználatú algebráról, hogy ferde csoport algebrák.

3.1. **Csoport-gyűrűk.** Legyen R egy gyűrű és G egy csoport. Szerkesszünk meg egy új gyűrűt, amelynek az additív csoportja G-beli elemek R-lineáris kombinációjából alkotott Abel-csoport, a szorzás pedig R-lineáris kiterjesztése a G-beli szorzásnak. Jelöljük $R[G]$-vel az így kapott gyűrűt.

Definíció 3.1 ([7]). Legyen R egy gyűrű és G egy csoport. Ekkor megszerkeszthető az $R[G]$ *csoport-gyűrű*, melynek elemei $\sum_{i=1}^{n} r_i g_i$, ahol $r_i \in R, g_i \in G, n \in \mathbb{N}$, az összeadás komponensenként történik, a szorzás pedig az alábbi szabály szerint:

$$\left(\sum r_i g_i\right)\left(\sum q_j g_j\right) = \sum_{g_i g_j = g} (r_i q_j) g$$

Az $R[G]$ szerkesztéséből könnyen látható, hogy valójában az R gyűrűre és G csoportra épített AG ferde csoport gyűrűről van szó.

3.2. **Mátrix gyűrűk.** Legyen k egy algebrailag zárt test. Legyen $A = k^n$ és $G = \langle g \rangle$ csoport, mely hat A-ra a következő képpen: $\alpha_g(r_1, r_2, ..., r_n) = (r_n, r_1, ..., r_{n-1}) \in A$. Szerkesszük meg AG ferde csoport algebrát. Ekkor belátható a következő állítás:

Állítás 3.1 ([2]). *Ha k egy algebrailag zárt test és $G = \langle g \rangle$ csoport, mely hat az $A = k^n$-re a fenti módon, akkor $AG \simeq \mathcal{M}_n(k)$.*

Bizonyítás. Elégséges észrevenni, hogy kG-nek n elemű k-bázisa van és ezért megszerkeszthető a vele izomorf $\mathcal{M}_n(k)$ mátrix k-algebra. $\square$

3.3. **Féldirekt szorzat.** Legyenek N és H csoportok, úgy, hogy H hat N-re, vagyis

$$(\exists)\phi : H \to \mathrm{Aut}(N), \phi(h) : N \to N$$

úgy, hogy

$$\phi(h_1 h_2) = \phi(h_1)\phi(h2), (\forall) h_1, h_2 \in H$$

Jelölve $\phi(h)(n) :=^h n$-val, megadhatjuk az alábbi definíciót

Definíció 3.2 ([7]). Legyenek N és H csoportok, úgy, hogy H hat N-re és k egy test. Ekkor megszerkeszthető a $G = N \rtimes H$ *féldirekt szorzat*, melynek elemei $(n_1, h_1) \in G, n_1 \in N, h_1 \in H$ és a szorzás a következő képpen történik

$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1^{h_1} n_2, h_1 h_2), (n_i, h_i) \in G$$

A fent megadott definíció alapján G egy ferde csoport algebraként is felfogható. Igaz a következő kijelentés, melyet nem fogunk igazolni.

Állítás 3.2 ([6]). *Legyenek N és H csoportok, úgy, hogy H hat N-re és legyen $G = N \rtimes H$. Ekkor*

$$kG \simeq (kN)H,$$

ahol a H hatását a (kN)-re az N-re való hatása indukálja.

3.4. **Út algebrákra szerkesztett ferde csoport algebrák.** Az alábbiakhoz hasonló példák nagyon fontosak az elmélet szempontjából és ezért fontos az újabb és újabb példák szerkesztése.[2]
Legyen adott a következő quiver Γ :

$$3 \xleftarrow{\beta} 2 \xleftarrow{\alpha} 1 \xrightarrow{\alpha'} 2' \xrightarrow{\beta'} 3'$$

Legyen k egy test. Szerkesszük meg az $A = k\Gamma$ útalgebrát. Legyen továbbá $G = \{e, \sigma\}$ csoport, úgy, hogy

$$\sigma e_1 = e_1, \sigma_2 = e_{2'}, \sigma_3 = e_{3'}, \sigma\alpha = \alpha', \sigma\beta = \beta'.$$

Ekkor kiterjeszthető a σ egy A-feletti k-automorfizmussá és kezelhetjük G-t mint automorfizmusok csoportja. Tehát kiszámítható az AG ferde csoport algebra.

Határozzuk meg először az $(A/J)G$-t. A (2.3)-as tétel alapján

$$(A/_J)G = (ke_1)G \times (ke_2 \times ke_{2'})G \times \ (ke_3 \times ke_{3'})G.$$

Legyenek a továbbiakban

$$\tilde{e_1} = \frac{e_1 + e_1\sigma}{2}, \tilde{\tilde{e_1}} = \frac{e_1 - e_1\sigma}{2},$$

a $(ke_1)G$ elemei. Igazoljuk, hogy $\{\tilde{e_1}, \tilde{\tilde{e_1}}\}$ idempotens ortogonális rendszere a $(ke_1)G$-nek. Hiszen

$$e_1 = \tilde{e_1} + \tilde{\tilde{e_1}}$$

és az is igaz, hogy

$$\tilde{e_1}^2 = \frac{(e_1 + e_1\sigma)(e_1 + e_1\sigma)}{4} = \frac{e_1 - e_1\sigma + e_1\sigma - e_1\sigma\sigma}{4} = \frac{2e_1 + 2e_i\sigma}{4} = \tilde{e_1},$$

ugyankkor

$$\tilde{e_1}\tilde{\tilde{e_1}} = \frac{e_1 - e_1\sigma + e_1\sigma - e_1\sigma\sigma}{4} = 0$$

Ennek tudatában a (2.3)-as tétel alapján felírható, hogy

$$(ke_1)G \simeq (kG)\tilde{e_1} \times (kG)\tilde{\tilde{e_1}}$$

Most vizsgáljuk meg a $(ke_2 \times ke_{2'})G$-t. Pontosan négy bázis eleme van az $e_2, e_{2'}, e_2\sigma$, és $e_{2'}\sigma$. Ez azt jelenti, ha elvégezzük a következő megfeleltetéseket

$$e_2 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{2'} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e_2\sigma \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_{2'}\sigma \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

kapjuk, hogy $(ke_2 \times ke_{2'})G \simeq \begin{pmatrix} k & k \\ k & k \end{pmatrix}$.

Hasonlóan kapjuk, hogy $(ke_3 \times ke_{3'})G \simeq \begin{pmatrix} k & k \\ k & k \end{pmatrix}$.

Tehát ezek alapján felírható, hogy

$$(A/J)G \simeq k \times k \times \begin{pmatrix} k & k \\ k & k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} k & k \\ k & k \end{pmatrix}$$

A továbbiakban vizsgáljuk meg a kapott eredményt. Mivel $\tilde{e_1}$, $\tilde{\tilde{e_1}}$ ortogonális idempotensek, ezért nem foglakozunk a $(kG)\tilde{e_1}$ és $(kG)\tilde{\tilde{e_1}}$-val.
De észrevehetjük, hogy $\begin{pmatrix} k & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & k \end{pmatrix}$ izomorf mint $\begin{pmatrix} k & k \\ k & k \end{pmatrix}$-modulus. Ezért a $(ke_2 \times ke_{2'})G$ és $(ke_2 \times ke_{2'})G$ szerkezetéből kihagyjuk a $\begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & k \end{pmatrix}$-nak megfelelő részeket vagyis az $e_{2'}$ és $e_{3'}$ bázisok által generált részt.
Így végül eljutunk az $e(AG)e$-hez, ahol $e = \tilde{e_1} + \tilde{\tilde{e_1}} + e_2 + e_3$.

Ami [2] alapján egy alap algebra és amely Morita ekvivalens az AG-vel.

Tovább vizsgálódva megállapíthatjuk, hogy $\{e_1, e_2, e_3, e_{2'}, e_{3'}, \alpha, \beta, \alpha', \beta', \beta\alpha, \beta'\alpha'\, e_1\sigma, e_2\sigma, e_3\sigma, e_{2'}\sigma, e_{3'}\sigma, \alpha\sigma, \beta\sigma, \alpha'\sigma, \beta'\sigma, \beta\alpha\sigma, \beta'\alpha'\sigma\}$ egy k-bázisa AG-nek. Most próbáljuk meghatározni az $eAGe$-nek k-bázisát.
Elvégezve a jobb- és baloldali szorzásokat megkapjuk, hogy

$$\{\tilde{e_1}, \tilde{\tilde{e_1}}, \frac{\alpha + \alpha\sigma}{2}, \frac{\alpha - \alpha\sigma}{2} \frac{\beta(\alpha + \alpha\sigma)}{2}, \frac{\beta(\alpha - \alpha\sigma)}{2}\}$$

bázisa az $eAGe$-nek.
Most elvégezve a $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha+\alpha\sigma}{2}$ és a $\tilde{\tilde{\alpha}} = \frac{\alpha+\alpha\sigma}{2}$ helyetesítéseket kiderül, hogy $eAGe$ izomorf az alábbi quiver út algebrájával:

$$\begin{tikzcd} \tilde{e_1} \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] & e_2 \arrow[d, "\beta"] & \tilde{\tilde{e_1}} \arrow[l, "\tilde{\tilde{\alpha}}"'] \\ & e_3 & \end{tikzcd}$$

Tehát sikerült megadni egy AG-vel Morita ekvivalens útalgebrát.

References

1. I. Assem, D. Simson, A. Skowronski, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, Cambridge Univ. Press, New York, 2006.
2. M. Auslander, I. Reiten, O. Smalø, *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge Univ. Press, New York, 1989.
3. D. J. Benson, *Representations and cohomology*, vol. 1, Cambridge Univ. Press, New York, 1995.
4. S. G. Krantz, *Dictionary of Algebra, Arithmetic and Trigonometry*, CRC Press, New York, 2001.
5. A. Marcus, *Modular Reresentation Theory af Finite Groups*, Editura EFES, Cluj-Napoca, 2002.
6. I. Reiten, C. Riedtmann, *Skew Group Algebras in the Representation Theory of Artin Algebras*, Journal of Algebra **92** (1985), 224-282.
7. J. J. Rotman, *Advanced Modern Algebra*, Prentice Hall, 2002.

Matematika Informatika szak, Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár, Románia

E-mail address: horobetemil@yahoo.com