Babeş-Bolyai Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar
Matematika Szak

XIII. Erdélyi Tudományos Diákköri Konferencia
Kolozsvár

Derivált kategóriák és tiltingelmélet

Témavezető:
dr. Marcus Andrei

Szerző:
Lőrincz András

2010 május 14-16

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Alapok

1.1. Előfeltételek és konvenciók

A dolgozat célja bemutatni az algebrák reprezentációelméletének az alapeszközeit, bevezetni a derivált kategóriák absztrakt fogalmát, majd a tiltingelmélet alaperedményeit vázolni. Nyelvezetét a Assem et al. [2006]; Happel [1988] könyvek alapozzák meg. A gyűrű egységelemes gyűrűt jelent, míg a K-algebra egy olyan gyűrűt, amely egyben vektortér is egy K kommutatív test fölött, és e két struktúra kompatibilis egymással. Mitöbb, az egyszerűség kedvéért utóbbit algebrailag zártnak tekintjük a dolgozatban. A K-algebráról feltételezzük, hogy véges dimenziós K fölött. Egy általánosabb környezetben dolgozik Auslander et al. [1995] , ahol a kommutatív testet helyettesíti a kommutatív Artin-gyűrű, illetve a véges dimenzionalitást a véges generáltság. Nagy része az eredményeknek kiterjeszthető erre az esetre, de a dolgozat nem tér ki az általánosításokra, ezek nagyrészt természetesek. A K-algebrának egy jobb oldali A-modulusát, M_R, egyszerűen modulusnak nevezünk, M; ez egyben K fölötti vektortér, ami kompatibilis a modulus struktúrával, és A egységeleme mindig triviálisan hat a modulusra. Az alap definíciók Assem et al. [2006] könyvben találhatók meg. Mivel egy jobb oldali A-modulus ugyanaz, mint egy bal oldali A^{op}-modulus, és fordítva (ahol A^{op} jelöli A oppozitalgebráját), ezért természetes az áttérés a bal oldali modulusokra. Függvények, utak illetve funktorok összetételét jobbról balra végezzük $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $g \circ f : X \to Z$. Ez néhol megkönnyíbiti (endomorfizmus algebrák), máshol megnehezíti jelöléseinket, de a lényegen természetesen nem változtat. Nincs általános konvenció a bal-jobb oldali modulusok illetve a függvények összetételére vonatkozóan. A fent említett könyv alap homológikus algebra és kategóriaelméleti ismereteket is tartalmaz, nem térünk ki ezek bevezetésére. $Mod - A$ jelöli A-nak a jobb oldali modulus kategóriáját, $mod - A$ pedig a véges dimenziós jobb oldali modulusok kategóriáját (általában utóbbi érdekel bennünket; általános gyűrűkben ez a végesen generált modulusok kategóriája, de a mi esetünkben ez ugyanaz). Általános gyűrű- és moduluselmélethez ajánljuk Jacobson [1989] könyvet. Ebben a fejezetben (és a dolgozatban általában) nem bizonyítunk eredményeket. Az érdekelt olvasó az ajánlott könyvészetben megtalálja a részleteket. Az ezt követő bemutató lényege az eredmények, technikák részletes tárgyalása és alkalmazása lesz példákon keresztül (Ext-tegezek, Auslander-Reiten tegezek, Tiltingelmélet), és Rickard tételének (elég hosszú) bizonyításának vázolása.

1.2. Idempotens felbontás

Mikor a A K-algebra felbonthatatlan modulusairól (amelyek nem írhatók fel két nemtriviális modulus direkt összegeként) tárgyalunk, fontos szerepet játszanak az idempotens elemek.

$e \in A$ idempotens, ha $e^2 = e$, és centrális idempotens, ha e mellett kommutál A minden elemével. $0, 1$ triviális centrális idempotensek. Ha A-nak nincs több centrális idempotense, akkor összefüggőnek hívjuk. Ez egyenértékű azzal, hogy A nem írható fel két K-algebra direkt szorzataként. Ezért gyakran elegendő csak összefüggő algebrákról tárgyalni.

Ha e egy nemtriviális idempotens, akkor $1 - e$ is az, mitöbb, ezek ortogonálisak (mindkét szorzatuk 0). Ez mindig egy modulus felbontást idéz elő, $A_A = eA \oplus (1 - e)A$. Fordítva, egy nemtriviális modulus felbontás két nemtriviális idempotenst származtat. Centrális idempotensek esetén ezek a felbontások algebra felbontások.

Egy idempotens elem primitív, ha nem írható fel két másik nemtriviális, ortogonális idempotens összegeként. Felírva az 1-et, mint páronként ortogonális primitív idempotensek összege, $1 = e_1 + \cdots + e_n$, eljutunk A-nak az úgynevezett felbonthatatlan felbontásához (f.f.), $A = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$, ahol $P_i = e_i A$. Egy algebrának több f.f-e lehet. A P_i modulusok (jobb oldali ideálok) lesznek a felbonthatatlan projektívek (lásd később). Egy ilyen $\{e_1, \ldots, e_n\}$ halmazt megtalálni tehát alapvető probléma, és teljes primitív ortogonális idempotenshalmaznak nevezzük.

1.3. Projektív és injektív modulusok

1. Definíció. F szabad A-modulust, ha izomorf A_A modulus $|I|$ darab direkt összegével, vagyis $F \cong A^{(I)}$, ahol I egy halmaz.

Könnyű belátni, hogy egy F szabad modulus teljesíti az alábbi tulajdonságot:

1. Tulajdonság. *Bármely epimorfizmus (szürjektív morfizmus) $h : M \to N$ esetén, az indukált morfizmus $\hom_A(F, h) : \hom_A(F, M) \to \hom_A(F, N)$, $f' \to h \circ f'$ szürjektív.*

A szabad modulusok ezt a tulajdonságát kiemelve (és átfogalmazva) jutunk a következő definícióhoz:

2. Definíció. Egy P modulust projektívnek nevezünk, ha teljesíti a fenti tulajdonságot, tehát bármely $h : M \to N$ epimorfizmus és bármely $f : P \to N$ morfizmus esetén létezik $f' : P \to M$ úgy, hogy az alábbi diagram kommutatív:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "f'"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "h"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Duálisan értemezzük az injektív modulusokat:

3. Definíció. Egy I modulust injektívnek nevezünk, ha bármely $u : L \to M$ monomorfizmus (injektív morfizmus) és bármely $g : L \to I$ morfizmus esetén létezik $g' : M \to I$ úgy, hogy az alábbi diagram kommutatív:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "u"] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[dl, dashed, "g'"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

Az alábbi tételben A egy tetszőleges gyűrű:

1. Tétel. *(Projektív modulusok jellemzése) Legyen P egy A-modulus. Ekkor a következők ekvivalensek:*

1. *P projektív modulus;*
2. *P egy szabad modulus összeadandója, vagyis létezik F szabad A-modulus és P' modulus úgy, hogy $P \oplus P' \cong F$;*
3. *Bármely rövid egzakt sorozat $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$ felhasadó;*
4. *$\hom(P, -)$ egzakt funktor.*

1. *Megjegyzés.* Az injektív modulusok esetén hasonló tulajdonságok a 3) illetve 4) duálisai. Sajnos általában nincs olyan praktikus jellemzés, mint a 2).

Legyen A ismét egy K-algebra. A felbonthatatlan felbontást f.f.-el rövidítjük.

1. Állítás. *Legyen $A = e_1A \oplus \cdots \oplus e_nA$ egy f.f. Akkor $P \in mod - A$ akkor és csak akkor projektív modulus, ha felírható $P = P_1 \oplus \cdots \oplus P_m$ alakba, ahol bármely $1 \leq i \leq m$ természetes számhoz létezik $1 \leq j \leq n$ úgy, hogy $P_i \cong e_jA$.*

4. Definíció. Legyen $D = \hom(-, K) : mod - A \to mod - A^{op}$ (kontravariáns) funktor. Ugyanúgy jelöljük a $D = \hom(-, K) : mod - A^{op} \to mod - A$ (kontravariáns) funktort. Mindkettőt dualitásnak nevezzük.

Könnyű belátni, hogy az evaluálás függvénye természetes funktor-ekvivalenciákat $1_{modA} \cong D \circ D$, $1_{modA^{op}} \cong D \circ D$ indukál, innen a dualitás elnevezés. A dualitás injektíveket projektívekbe, projektíveket injektívekbe visz. Megjegyzés: Bár ez az első alkalom, ahol explicit módon kihasználtuk a K kommutatív testünket, a dualitás is általánosítható az Artin-gyűrűk esetére, lásd Auslander et al. [1995].

5. Definíció. Legyen M egy A-modulus. Értelmezés szerint a Jacobson-radikálja M-nek az összes maximális részmodulusának metszete. Jelölése rad M. $M = A$ esetén ez egy bal-jobb oldali ideál. Egyszerű modulus az az A-modulus, amelyiknek nincs nemtriviális részmodulusa.

Megjegyzés: M egyszerű modulus esetén nyilván rad $M = 0$. Fordítva ez nem feltétlenül igaz. Ezeket szemi-egyszerű modulusoknak nevezzük, és ezek egyszerű modulusok direkt összegei.

2. Tétel. *(Releváns modulusok jellemzése) Legyen $A = e_1A \oplus \cdots \oplus e_nA$ egy f.f. Ekkor:*

- *Minden felbonthatatlan projektív modulus izomorf $P_1 = e_1A$, $P_2 = e_2A$, $\ldots$ $P_n = e_nA$ valamelyikével.*
- *Minden felbonthatatlan injektív modulus izomorf $I_1 = D(Ae_1)$, $I_2 = D(Ae_2)$, $\ldots$ $I_n = D(Ae_n)$ valamelyikével, ahol D a dualitás funktora.*
- *Minden felbonthatatlan egyszerű modulus izomorf S_1 =top e_1A , S_2 =top e_2A, $\ldots$ S_n = top e_nA valamelyikével, ahol top $M = M/$rad M. Mitöbb, $S_i \cong S_j$ akkor és csakis akkor, ha $P_i \cong P_j$.*

1.4. Feloldások és az Ext-csoport

Az alábbiakban homológikus algebra ismereteket feltételezünk, és az áttekintés gyors lesz. Bővebben ezek megtalálhatóak Weibel [1994]-ben. A következő definíció a szabad feloldás kiterjesztése:

6. Definíció. Egy M A-modulus $P_\bullet$ projektív feloldás alatt a következő egzakt sorozatot (komplexet) értjük:

$$P_\bullet : \qquad \cdots \longrightarrow P_m \xrightarrow{d_m} P_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

ahol P_i projektívek. Pontosabban, a projektív feloldásba, mint egy komplex $P_\bullet$, nem értjük bele az M-et (0-val helyettesítjük), és a fentit így jelöljük: $P_\bullet \to M$.

A duális:

7. Definíció. M A-modulus $I^\bullet$ injektív feloldásának nevezzük a következő egzakt sorozatot (komplexet):

$$I^\bullet : \qquad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{d^0} I^0 \xrightarrow{d^1} I^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I^m \xrightarrow{d^{m+1}} I^{m+1} \longrightarrow \cdots$$

ahol I^i injektívek. Pontosabban, az injektív feloldásba, mint egy komplex $I^\bullet$, nem értjük bele az M-et, és a fentit így jelöljük: $M \to I^\bullet$.

A következő állítás lehetővé teszi az Ext-csoportok megszerkesztését:

2. Állítás. *Legyen A K-algebra. Ekkor:*

- *$Mod - A$ illetve $\mathrm{mod} - A$-ban elég injektív objektum van, vagyis minden modulus beágyazható egy injektív modulusba (létezik $M \to I$ mono).*
- *$Mod - A$ illetve $\mathrm{mod} - A$-ban elég projektív objektum van, vagyis minden modulus lefödhető egy projektív modulussal (létezik $P \to M$ epi).*

1. Következmény. *Minden M A-modulusnak van projektív illetve injektív feloldása.*

Egy modulus projektív dimenziója pd M a minimális hosszúságú $P_\bullet$ projektív feloldás hossza (ha nem létezik véges, akkor pd $M = \infty$). Egy P modulus akkor és csakis akkor projektív, ha pd $P = 0$. Egy algebra globális dimenziója egyenlő a modulusainak a projektív dimenzióinak a maximumával (ha nem létezik akkor ∞).

A következőkben az Ext-csoportokat vezetjük be, melyek (szintén) algebrai topológiából származnak. Láttuk, hogy $F = \mathrm{hom}(M, -)$ akkor és csak akkor egzakt, ha M projektív, és $\mathrm{hom}(-, M)$ akkor és csak akkor egzakt, ha M injektív. Viszont igaz, hogy a $F = \mathrm{hom}(M, -)$ bal egzakt funktor (illetve a $\mathrm{hom}(-, M)$ bal egzakt kontravariáns funktor), vagyis ha $0 \to A \to B \to C \to 0$ egzakt, akkor

$0 \to \mathrm{hom}(M, A) \to \mathrm{hom}(M, B) \to \mathrm{hom}(M, C)$

(illetve $0 \to \mathrm{hom}(C, M) \to \mathrm{hom}(B, M) \to \mathrm{hom}(A, M)$)

sorozat is egzakt. Általában egy F bal egzakt funktor esetén beszélhetünk a jobb oldali derivált funktorokról, $R^n F$, amit a $F = \mathrm{hom}(M, -)$ esetén az $\mathrm{Ext}^n(M, -)$ jelöl. $\mathrm{Ext}^n(M, N)$-et a következő módon határozzuk meg:

Tekintsük N modulusnak $N \to I^\bullet$ injektív feloldását. Alkalmazzuk $I^\bullet$-re $F = \hom(M, -)$-ot, és kapunk egy új sorozatot, $\hom(M, I^\bullet)$. Ez általában nem exact sorozat, vegyük az n-edik (ko)homológia csoportját. Ez a csoport $\mathrm{Ext}^n(M, N) = H^n(\hom(M, I^\bullet))$.

2. *Megjegyzés.* – Hogy a definíció helyes legyen, be kell látni, hogy $\mathrm{Ext}^n(M, N)$ független N-nek az injektív feloldásától. Ez igaz lesz: egy másik injektív feloldást választva izomorf csoportokat kapunk.

- Az Ext-csoport a $\hom(-, M)$ kontravariáns funktor jobb oldali derivált funktorából is megszerkeszthető, amit projektív feoldásokkal számolunk ki. A konstrukció duális, és a kapott csoport ugyanaz (izomorfak, funktoriálisan).
- Másik fontos konstrukció a $- \otimes_A N$ jobb egzakt funktorból származik. Hasonló módon, projektív feloldásokkal, definiáljuk ennek n-edik bal oldali derivált funktorát, melynek jelölése Tor $^n(-, N) = L^n(- \otimes N)$.
- Az Ext bifunktor, pontosabban kontravariánsan funktoriális az első változóban, és kovariánsan funktoriális a másodikban.
- Könnyű belátni, hogy $\mathrm{Ext}^0(M, N) \cong \hom(M, N)$.

A következő tétel mutatja meg az Ext-csoportok hasznosságát:

3. Tétel. *(Hosszú egzakt sorozatok) Legyen M A-modulus. Akkor egy $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ rövid egzakt sorozat a következő hosszú egzakt sorozatokat indukálja:*

$0 \to \hom(M, X) \to \hom(M, Y) \to \hom(M, Z) \to \mathit{Ext}^1(M, X) \to \mathit{Ext}^1(M, Y) \to \mathit{Ext}^1(M, Z) \to \cdots \to \mathit{Ext}^n(M, X) \to \mathit{Ext}^n(M, Y) \to \mathit{Ext}^n(M, Z)$

és

$0 \to \hom(Z, M) \to \hom(Y, M) \to \hom(X, M) \to \mathit{Ext}^1(Z, M) \to \mathit{Ext}^1(Y, M) \to \mathit{Ext}^1(X, M) \to \cdots \to \mathit{Ext}^n(Z, M) \to \mathit{Ext}^n(Y, M) \to \mathit{Ext}^n(X, M)$

Az Ext^{n-1} és Ext^n csoportokat összekötő morfizmusokat csatlakozó morfizmusoknak nevezzük.

2. fejezet

Morita-ekvivalencia

2.1. Bevezetés

Ez a fejezet egy rövid behatolást mutat be a Morita-elméletbe. A reprezentációelmélet lényegében modulusokkal, és a köztük levő morfizmusokkal foglalkozik. Ezért feltevődik a természetes kérdés: Mikor ekvivalens kategóriák $Mod - A$ és $Mod - B$? Mint kiderül, ez nem jelenti mindig azt, hogy $A \cong B$, mint K-algebrák. Viszont már az ötvenes években K. Morita japán matematikus szükséges és elégséges feltételt adott arra, hogy a két gyűrűnek ekvivalens moduluskategóriája legyen, lásd Morita [1958]. Mi csak a K-algebra esetre koncentrálunk, bővebben az úgynevezett Morita-kontextusról Jacobson [1989] könyvet ajánljuk. A bizonyítások inkább vázlatszerűek lesznek. A Morita-ekvivalencia rejt még néhány invariánst, például a gyűrűk centerei izomorfak. Ez lényeges általánosítása annak, hogy egy mátrixgyűrű centrális elemei (amelyek kommutálnak minden elemmel) a diagonális mátrixok. Később meglátjuk, hogy a derivált Morita-ekvivalencia, amely ismét lényeges általánosítása a Morita-ekvivalenciának, szintén megtartja a centert. Továbbra is az algebráink véges dimenziósak.

2.2. Morita tétele

Feltételezzük, hogy két algebra Morita-ekvivalens, vagyis a moduluskategóriájuk ekvivalens. Legyenek $F : Mod - A \to Mod - B$ és $G : Mod - B \to Mod - A$ az ekvivalenciák. Alapvető tulajdonságokat keresünk, melyek megőrződnek ezek által. Vegyük például B_B képét, $P = G(B)$, mely egy jobb A-modulus. Mit mondhatunk el erről? Először is, G indukál egy izomorfizmust: $\mathrm{End}_A(P) = \hom_A(G(B), G(B)) \cong \hom_B(B, B) \cong B_B$. Másrészt feltevődik a kérdés, hogy P projektív-e? Mivel a projectív modulus fogalma kategóriaelméleti, ezért egy ekvivalencia projektíveket projektívekbe visz. Partikulárisan, mivel B_B projektív, $P = F(B)$ is projektív lesz. Mivel a véges dimenzionalitásnak is lehet kategóriaelméleti definíciót adni, következik, hogy F véges dimenziós modulust véges dimenziósba visz, vagyis $F : Mod - A \to Mod - B$ leszűkítése szintén egy ekvivalenciát eredményez $F : mod - A \to mod - B$. Partikulárisan, P véges dimenziós. Generátornak nevezünk egy M modulust, ha bármilyen modulus felírható mint M-ek direkt összegének homomorfikus képe. Ez a tulajdonság is megőrződik egy ekvivalencia által. Mivel B_B egyértelműen generátor, ezért P is generátor lesz. Ennyi tulajdonság elég lesz, hogy egy teljes jellemzést adjunk. Tehát mit tudunk P-ről? P egy véges dimenziós projektív generátor. Az ilyen modulusokat progenerátornak nevezzük. Összefoglalva, ha $Mod - A$ ekvivalens $Mod - B$-vel (ami ekvivalens avval, hogy $mod - A$ ekvivalens $mod - B$-vel), akkor létezik P_A progenerátor úgy, hogy $\mathrm{End}_A(P_A) \cong B$.

Fordítva, a célunk belátni, hogy ha A egy K-algebra, P egy progenerátor, $B = \mathrm{End}_A(P_A)$, akkor $Mod - A$ ekvivalens $Mod - B$-vel.

8. Definíció. Legyen A, B két gyűrű. Azt mondjuk, hogy $(A, B,_B M_A,_A N_B, \phi, \psi)$ egy Morita kontextus, ahol $\phi : N \otimes_B M \to A$ egy $A - A$ morfizmus, $\psi : M \otimes_A N \to B$ egy $B - B$ morfizmus, úgy, hogy bármely $x, z \in M$, és bármely $y, w \in N$ elemekre teljesülnek:

$x\phi(y \otimes z) = \psi(x \otimes y)z$ és $y\psi(z \otimes w) = \phi(y \otimes z)w$

4. Tétel. *Ha $(A, B,_B M_A,_A N_B, \phi, \psi)$ egy Morita kontextus, és ϕ illetve ψ szürjektívek, akkor ezek izomorfizmusok is. Sőt, ebben az esetben $- \otimes_A N$ és $- \otimes_B M$ funktorok egy ekvivalenciát képeznek $Mod - A$ és $Mod - B$ között ($mod - A$ és $mod - B$ között is).*

Bizonyítás. Bebizonyítjuk, hogy ϕ injektív. Legyen $\sum x_i \otimes y_i \in \ker \phi$. Mivel ϕ szürjektív, léteznek $z_j \in N$ és $w_j \in M$, ú.h. $\sum \phi(z_j \otimes w_j) = 1_A$, A-nak az egységeleme. Ekkor: $\sum_i x_i \otimes y_i = \sum_{i,j} (x_i \otimes y_i)\phi(z_j \otimes w_j) = \sum x_i \otimes y_i\phi(z_j \otimes w_j) = \sum x_i \otimes \psi(y_i \otimes z_j)w_j = \sum x_i\psi(y_i \otimes z_j) \otimes w_j = \sum \phi(x_i \otimes y_i)z_j \otimes w_j = \sum \phi(x_i \otimes y_i)(z_j \otimes w_j) = 0$. Tehát ϕ injektív, és hasonlóan ψ is az. Tehát $N \otimes_B M \cong A$ és $M \otimes_A N \cong B$. Ezeket felhasználtva azonnali, hogy $- \otimes_A N$ és $- \otimes_B M$ funktorok ekvivalenciát képeznek, mert $(X \otimes_A N) \otimes_B M \cong X \otimes_A (N \otimes_B M) \cong X \otimes_A A \cong X$, és ezek az izomorfizmusok természetesek. Hasonlóan járunk el a másik funktorral. Tehát ezek egy ekvivalenciát képeznek. □

Most kijelenthetjük az ígért fordított állítást:

5. Tétel. *Ha A egy K-algera, P egy progenerátor, $B =$End$_A(P_A)$, akkor $Mod - A$ ekvivalens $Mod - B$-vel.*

Bizonyítás. Felépítjük P-re a természetes Morita-kontextust, és belátjuk, hogy a kért függvények szürjektívek. Világos, hogy P egy $B - A$ bimodulus. Jelölje $Q = P^* = Hom_A({}_BP_A, A_A)$, akkor ez egy $A - B$ bimodulus. Legyen $\phi : Q \otimes_B P \to A$ az evaluálás függvény, vagyis $\phi(f \otimes x) = f(x)$ jól definiált morfizmus. Ez szürjektív lesz. Részletesebben: mivel P generátor, létezik egy szürjekció $h : P^{(I)} \to A$, ahol I egy (index)halmaz, $P^{(I)}$ pedig P-nek $|I|$ darab direkt összege. Tehát egy $a \in A$-ra legyen $x = \sum_{j \in J} x_j$, ahol $J \subset I$ egy véges részhalmaz. Jelölje i_j a beágyazás morfizmust $P \hookrightarrow P^{(I)}$, ahol $j \in J$. Legyen $f_j = h \circ i_j \in \hom(P, A)$, és mivel $a = h(x) = \sum_{j \in J} h(x_j) = \sum_{j \in J} f_j(x_j)$, ezért $\phi(\sum_{j \in J} f_j \otimes x_j) = a$, vagyis ϕ valóban szürjektív. Legyen $\psi : P \otimes_A Q \to B$, $\psi(x \otimes f)(y) = xf(y)$ jól értelmezett morfizmus. Ez is szürjektív lesz P projektivitása és véges dimenzionalitása miatt. Könnyű belátni, hogy $(A, B,_B P_A,_A Q_B, \phi, \psi)$ Morita-kontextus. Az előző tétel alapján ez akkor egy Morita-ekvivalenciát jelent. □

Összegezve:

6. Tétel. *(Morita) Legyenek A és B K-algebrák (vagy általánosan gyűrűk). $Mod - A$ és $Mod - B$ ekvivalens kategóriák akkor és csakis akkor, ha $mod - A$ és $mod - B$ ekvivalens kategóriák, ami akkor és csakis akkor teljesül, ha létezik P_A progenerátor úgy, hogy $B \cong$ End$_A(P)$.*

3. *Megjegyzés.* Könnyű belátni, hogy bármely F ekvivalencia izomorf egy $- \otimes_B P$ funktorral, ahol P_A progenerátor.

2.3. Alkalmazások

A következőkben néhány egyszerű alkalmazást mutatunk be. Legyen A egy K-algebra, e egy idempotens és M egy jobb A-modulus. Akkor eAe egy altere A-nak, és szintén egy K-algebra, melynek semleges eleme e. Könnyű belátni, hogy Me egy jobb eAe-modulus. Partikulárisan, Ae egy jobb eAe-modulus, illetve eA egy bal eAe-modulus is. Tehát $\hom(eA, M)$ egy jobb A-modulus.

1. Segédtétel. *A fenti jelöléseket használva fennállnak a következő identitások:*

1. $u_M : \hom_A(eA, M) \to Me$, $u_M(f) = f(e) = f(e)e$ *egy jobb* eAe*-modulus izomofizmus, mely funktoriális* M*-ben.*
2. *Mitöbb,* u_{eA} : *End* $eA \to eAe$ *egyben egy* K*-algebra izomorfizmus.*

Bizonyítás. 1) Könnyű ellenőrizni, hogy u_M valóban egy morfizmus, és funktoriális M-ben. Legyen $v_M : Me \to \hom_A(eA, M)$, $v_M(me)(ea) = mea$ a szorzatfüggvény. Ez egy jól értelmezett eAe-modulus morfizmus, és inverze u_M-nek.

2) Csak azt kell még ellenőrizni, hogy u_{eA} megőrzi a szorzatot is, ami triviális. □

Mivel moduluskategóriákról beszélünk, célszerű lenne leegyszerűsíteni egy általános K-algebrát, úgy, hogy a modulus kategóriájuk ugyanaz legyen. Ezt a következőképpen valósítjuk meg: Legyen $A = e_1A \oplus \cdots \oplus e_nA$ egy f.f. Előfordulhat, hogy két felbonthatatlan projektívre $e_iA \cong e_jA$, $i \neq j$. Hogy ezt „korrigáljuk”, vegyünk mindegyik ekvivalencia osztályból egy idempotenst. Legyenek ezek $e_{j_1} \dots e_{j_a}$, vagyis bármely e_iA-ra létezik j_s, úgy hogy $e_{j_s}A \cong e_iA$ és $e_{j_i}A \ncong e_{j_t}A$, mikor $i \neq t$. Legyen $e_A = e_{j_1} + \cdots + e_{j_a}$. Képezzük $A^b = e_AAe_A$ algebrát. Ezt nevezzük A bázisalgebrájának. A konstrukció helyes, mert:

4. *Megjegyzés.* A bázis algebra nem függ az idempotensek megválasztásától (izomorfizmusig). Mitöbb, egy teljes primitív ortogonális idempotens osztálya $e_{j_1} \dots e_{j_a}$. Igaz, hogy $e_{j_i}A^b \ncong e_{j_t}A^b$, mikor $i \neq t$. Az utóbbi tulajdonságú algebrákat nevezzük egyszerűen bázisalgebráknak.

Világos, hogy $e_AA = e_{j_1}A \oplus \cdots \oplus e_{j_a}A$ projektív és véges dimenziós. Sőt, a szerkesztés miatt generátor is. Tehát progenerátor. Alkalmazhatjuk Morita tételét, $mod - A$ és $mod-$End e_AA Morita-ekvivalensek. De az előző segédtétel alapján End $e_AA \cong eAe$. Tehát:

7. Tétel. *Legyen* A K*-algebra,* A^b *ennek bázisalgebrája. Ekkor* A *algebra Morita-ekvivalens* A^b*-vel.*

1. Példa. Algebrák leggyakrabban valamilyen mátrixalgebrákból származnak. Vegyük a teljes mátrix algebrát, $A = M_n(K)$. Ennek a standard idempotens osztálya $e_1 \dots e_n$, ahol $e_i = e_{ii}$ az a mátrix, melynek (i, i) pozíciójában 1-es van, a többi pedig 0. A standard (felbonthatatlan, sőt, egyszerű) jobb A-modulus nem más, mint a sorvektor, K^n. $e_1 + \cdots + e_n = I_n$, és e_i primitív idempotensek, és szintén nyilvánvaló, hogy $e_iA \cong e_jA \cong K^n$, tehát A bázisalgebrája $A^b \cong e_1Ae_1 \cong K$. Tehát $mod - M_n(K) \cong mod - K$. Hasonlóan módon belátható, hogy általános A K-algebrára igaz, hogy $mod - A \cong mod - M_n(A)$. Ezzel a teljes mátrixalgebrák reprezentációelméleti szempontból osztályozva vannak.

A bázisalgebrák praktikusak, mert egyszerűbb struktúrával rendelkeznek. A következő állítást nem igazoljuk:

3. Állítás. *1. Legyen* A *egy* K*-algebra.* A *akkor és csak akkor bázisalgebra, ha* $B = A/rad\ A \cong K \times K \cdots \times K$ *véges tagú szorzattal.*

2. *Egy bázisalgebra egyszerű modulusai egydimenziósak.*
3. *Legyen I egy kétoldalú nilpotens ideálja A-nak (vagyis létezik $m \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $I^m = 0$). Akkor $I \subset radA$. Ha e mellett $A/I \cong K \times \cdots \times K$, akkor I =rad A.*
4. *Legyen A bázisalgebra, I kétoldalú ideálja. I =rad A akkor és csakis akkor, ha I nilpotens és $A/I \cong K \times K \cdots \times K$.*

2. Példa. Érdekesebbek a nem teljes mátrixalgebrák. Vegyük például az alsó trianguláris mátrixokat:

$$A = T_n(K) = \begin{bmatrix} K & 0 & \dots & 0 \\ K & K & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K & K & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Ez természetesen egy véges dimenziós K-algebra. A standard idempotensek e_i ugyanazok, mint a teljes mátrixalgebra esetében. Itt viszont e_iA a megfelelő sormodulusok, $\dim e_iA = i$, tehát $e_iA \ncong e_jA$, mikor $i \neq j$. Ez azt jelenti, hogy A bázisalgebra. Könnyű belátni, hogy rad A pontosan azokból a mátrixokból áll, amelyeknek az átlós elemei 0-k. Ez nilpotens ideál. Világos, hogy $A/$rad $A \cong K \times \cdots \times K$, n darab K direkt szorzatával (a diagonális mátrixokkal). A felbonthatatlan projektíveket ismerjük. Tudjuk, hogy az egyszerű modulusok egydimenziósak kell legyenek, és $S_i =$ top $e_iA = e_iA/$rade_iA. Azonnali, hogy rade_iA azon e_iA-ban levő sormátrixok modulusa, melyek az átlón 0-t vesznek fel. $e_1A = S_1$ egyszerű-projektív modulus illetve $S_i \cong$ top $e_iA \cong Ke_{i1}$ (valóban) egydimenziós modulusok. Az is igaz, hogy $I_1 = D(Ae_1) \cong e_nA$, tehát e_nA projektív-injektív.

3. fejezet

Tegezek (Quiverek)

3.1. Bevezetés

A quiver magyarul tegezt jelent, és a matematikában ez nem más, mint egy irányított gráf. A quiver a reprezentációelméletben már egy jól rögzített fogalom; mi a tegez szót fogjuk használni; a quiver a reprezentációelméletben már egy jól rögzített fogalom. A XX. század közepére visszavezethető egy algebrának gráfokkal való szemléltetésének az ötlete. Formálisan Gabriel [1972] vezette be őket. A tegezek nagyon hasznosnak bizonyultak, és a az associatív algebrák reprezentációelméletének modern alapeszközei lettek. Mint majd látjuk, többfajta tegezt lehet egy algebrához hozzárendelni, és mindegyik más-más információt fog rejteni. A legpraktikusabb mód algebrákról beszélni kétségtelenül a tegezek révén valósul meg, hiszen az algebrát (útalgebra), a modulusait (tegez reprezentációk), sőt, a modulus kategóriáját is leírhatjuk velük. Felhívjuk ismét a figyelmet a jelölésekre. Utakat balról jobbra teszünk össze, függvényeket pedig jobbról balra. Továbbra is jobb-modulusok érdekelnek. Ha ezeken változtatunk, fordított eljárásokat kaphatunk (lásd Happel [1988]). Tapasztalat szerint ezek választások megkönnyebbítik jelöléseinket; ez a fejezet *Assemet al.* [2006]-ből inspirálódik.

3.2. Útalgebrák

Mint már említettük, a tegez egy irányított gráf $Q = (Q_0, Q_1)$, ahol Q_0 a csomópontok, Q_1 az irányított nyilak halmaza. Egy nyíl $\alpha \in Q_1$ kezdőpontját $k(\alpha) \in Q_0$, végpontját $v(\alpha) \in Q_0$ jelöli. Egyelőre semmit sem feltételezünk a tegezünkről. A csomópontokat karikákkal szoktunk jelölni. Példa egy tegezre:

$$\begin{tikzcd}
 & & \circ \arrow[loop right] \\
\circ \arrow[loop left] \arrow[r, shift left] & \circ \arrow[l, shift left] \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & \circ
\end{tikzcd}$$

Egy tegez véges, ha Q_0 és Q_1 végesek. A tegez összefüggő, ha a gráfja összefüggő irányítatlanul. Útnak nevezzük irányított nyilak összetételét (ha ez lehetséges), tehát egy olyan nyilakból álló sorozat, melyben egy nyíl végpontja egybeesik az utána következő kezdőpontjával. Értelmezzük az út kezdőpontját és vegpontját is az egyértelmű módon. Az út hossza egyenlő a nyilak számával. Értelmezzük a 0 hosszúságú utakat is, melyek a pontok, és triviális utaknak nevezzük. Nyilván az 1 hosszúságú utak pontosan a nyilak. Kör egy nem triviális út, melynek kezdőpontja egybeesik végpontjával. 1 hosszúságú kört huroknak nevezünk. Körmentes egy tegez, nem tartalmaz kört. Például az előző tegez véges, összefüggő, de nem körmentes. Egy út $(a|\alpha_1, \ldots, \alpha_l|b)$, ahol a az út (és α_1) kezdőpontja, b az út (és α_l) végpontja, l az út hossza, és $v(\alpha_{i-1} = k(\alpha_i)$. A triviális utakat jelöljük $\epsilon_a = (a||a)$.

9. Definíció. Legyen Q egy tegez, K egy kommutatív test. Értelmezzük KQ útalgebrát a következő módon:

– KQ-nak K fölötti bázisát az összes út képezi.

– Két elem szorzatát az utak összetevése (mint báziselemek) indukál, vagyis, ha az két báziselem $(a|\alpha_1, \ldots, \alpha_l|b)$ és $(c|\beta_1, \ldots, \beta_k|d)$ utak, akkor szorzatuk definíció szerint

$$(a|\alpha_1, \ldots \alpha_l|b) \cdot (c|\beta_1, \ldots \beta_k|d) = \delta_{bc}(a|\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \ldots \beta_k|d)$$

ahol δ_{bc} a Kronecker delta (tehát ha nem lehet összetenni két utat, szorzatuk 0, különben pedig az összetett út). Ezt a szorzatot a báziselemekről kiterjesztve minden elemre, egy asszociatív K-algebrát kapunk.

Jelölje KQ_i az i hosszúságú utakból generált vektorteret, ahol $i \in \mathbb{N}$.

5. *Megjegyzés.* A következő vektortér felbontás természetes:

$$KQ = KQ_0 \oplus KQ_1 \oplus \cdots \oplus KQ_l \oplus \ldots$$

Sőt, az is nyilvánvaló, hogy $(KQ_n) \cdot (KQ_m) \subset KQ_{n+m}$, minden $n, m \in \mathbb{N}$. Ez azt jelenti, hogy KQ egy graduált K-algebra.

3. Példa. 1. Egy másik fontos K-algebracsalád a polinomalgebrákból származik. Vegyük például $K[X]$ (végtelen dimenziós) polinomalgebrát. Vegyük a következő tegezt:

$$\begin{tikzcd} 1\circ \arrow[loop right, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

KQ bázisát képezi $\{\epsilon_1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n, \ldots\}$, és ezeket így szorozzuk:

$\alpha^k \alpha^l = \alpha^{k+l}$, ahol $k, l \in \mathbb{N}$, és ϵ_1 az egységelem.

Azonnali, hogy $KQ \cong K[X]$, $\alpha^n \mapsto X^n$ algebra izomorfizmus által.

2. Legyen Q a következő tegez:

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[dr] & \\ \circ \arrow[r] & \circ \\ \circ \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Egyszerű belátni, hogy

$$KQ \cong \begin{bmatrix} K & 0 & 0 & 0 \\ K & K & 0 & 0 \\ K & 0 & K & 0 \\ K & 0 & 0 & K \end{bmatrix}$$

Jelölje a kétoldali-ideált, melyet a nyilak generálnak, $R_Q = KQ_1 \oplus KQ_2 \oplus \dots$. Ezt nevezzük nyíl-ideálnak.

Általában egy útalgebra nem véges dimenziós, nem feltéténül egységelemes, és nem feltétlenül összefüggő (összefüggő algebra = nem írható fel két algebra direkt szorzataként). Viszont igaz a következő:

4. Állítás. *Legyen Q egy véges összefüggő tegez. Ekkor $\epsilon_a = (a||a)$, $a \in Q_0$ egy teljes primitív ortogonális idempotenshalmaz, összegük KQ egységeleme, és KQ egy összefüggő algebra. Ha Q körmentes is, akkor KQ véges dimenziós bázisalgebra és rad $KQ = R_Q$, ahol R_Q a nyíl-ideál.*

Egy tegezt, mely véges, összefüggő, és körmentes, egyszerűnek nevezünk. A következőkben tegez mindig véges tegezt fog jelenteni.

A következő egy praktikus értelmezése az útalgebráknak.

2. Segédtétel. *Legyen Q egy egyszerű gráf, $Q_0 = \{1, 2, \dots n\}$ a csomópontok egy olyan számozása, hogy ha létezik egy nyíl i-ből j-be, akkor $j \leq i$. Ekkor KQ izomorf a következő általános trianguláris mátrixalgebrával:*

$$KQ \cong \begin{bmatrix} \epsilon_1(KQ)\epsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ \epsilon_2(KQ)\epsilon_1 & \epsilon_2(KQ)\epsilon_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon_n(KQ)\epsilon_1 & \epsilon_n(KQ)\epsilon_2 & \dots & \epsilon_n(KQ)\epsilon_n \end{bmatrix}$$

4. Példa.

- Legyen Q a Kronecker tegez:

  $$1\circ \leftleftarrows \circ 2$$

  Az előző segédtétel szerint

  $$KQ \cong \begin{bmatrix} K & 0 \\ K^2 & K \end{bmatrix}$$

  mátrixszorzással, és K^2 a természetes módon $K - K$ bimodulusnak tekintjük.

- Azonnali, hogy teljes alsó trianguláris algebra $T_n(K)$ izomorf KQ-val, ahol Q tegez a következő:

  $$\circ_1 \longleftarrow \circ_2 \longleftarrow \cdots \longleftarrow \circ_n$$

Felmerül a kérdés, hogy milyen tulajdonságokkal rendelkezik KQ útalgebra egy Q egyszerű tegez fölött. Kiderül, hogy egy ilyen algebra mindig öröklődő, sőt, minden öröklődő algebra egy útalgebra egy egyszerű tegez fölött.

10. Definíció. Egy A algebrát akkor nevezünk öröklődőnek, ha teljesíti valamelyiket az alábbi ekvivalens tulajdonságok közül:

1. A-nak minden jobb-ideálja projektív A-modulus.

2. A globális dimenziója legfeljebb 1.

3. Egy projektív modulus részmodulusa projektív.

4. Egy injektív modulus faktormodulusa injektív.

5. Létezik Q egyszerű tegez úgy, hogy $A \cong KQ$.

Hogy kiterjesszük az útalgebrákat, értelmezhetjük az úgynevezett relációkat a Q tegezünkön. Egy reláció $w = \sum_{i=1}^{n} k_i u_i \in Q$, utak lineáris kombinációja, $k_i \in K$, u_i legalább 2 hosszuságú utak, úgy, hogy u_i és u_j kezdőpontja és végpontja egybeesik, $i, j \in \mathbb{N}$.

11. Definíció. Legyen Q egy véges tegez, KQ az útalgebra, R_Q ennek nyíl-ideálja. Egy kétoldalú KQ-ideált elfogadhatónak nevezünk, ha létezik $m \geq 2$ úgy, hogy

$$R_Q^m \subset I \subset R_Q^2$$

Ekkor a (Q, I) párt kötött tegeznek nevezzük, KQ/I faktoralgebrát pedig kötött útalgebrának.

5. Példa. Legyen Q a következő tegez:

$$\alpha \circlearrowleft \circ_1 \circlearrowright \beta$$

Világos, hogy $KQ \cong K\langle X_1, X_2 \rangle$, ahol utóbbi kétváltozós nem kommutatív polinomalgebra. Legyenen a relációk $w_1 = \alpha\beta - \beta\alpha$, $w_2 = \beta^2$, $w_3 = \alpha^2$, akkor könnyű belátni, hogy az általuk generált I ideált teljesíti $RQ^3 \subset I \subset RQ^2$, tehát I elfogadható ideál. KQ/I négy dimenziós, báziselemei $\{e_1 + I, \alpha + I, \beta + I, \alpha\beta + I\}$. Sőt, $KQ/I = K[X_1, X_2]/\langle X_1^2, X_2^2 \rangle$, ahol $K[X_1, X_2]$ a (hagyományos) kommutatív polinomalgebra.

Célunk belátni, hogy minden „releváns" algebra egy kötött útalgebra. Előbb egy jellemzés, amiért bevezettük a relációkat:

2. Tulajdonság. *Legyen Q egy véges tegez, I egy elfogadható ideálja KQ-nak. Akkor létezik egy véges relációhalmaz $\{w_1, \ldots w_m\}$ úgy, hogy ezek generálják I-t, vagyis $I = \langle w_1, \ldots w_m \rangle$.*

A következő feladat megszerkeszteni egy algebrából egy tegezt. A következőkben K algebrai zártsága fontos lesz.

12. Definíció. Legyen A egy véges dimenziós összefüggő bázisalgebra és $\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ egy teljes idempotenshalmaz. A (Gabriel vagy Ext)-tegezét A-nak, Q_A, a következő módon értelmezzük:

1. Q_A csomópontjai $1, 2, \ldots n$, ezek bijekcióban vannak $e_1, e_2, \ldots e_n$ idempotensekkel.

2. Két csomópontra $i, j \in (Q_A)_0$ a nyilak $\alpha : i \to j$ száma megegyezik $\dim_K e_i(\text{rad } A/\text{rad}^2 A)e_j = \dim_K e_i(\text{rad } A)e_j / e_i(\text{rad}^2 A)e_j$ dimenziókkal.

6. *Megjegyzés.* 1. A konstrukció helyes, mert a fenti tegez Q_A nem függ az idempotensek megválasztásától.

2. Q_A véges tegez, A összefüggéséből következik Q_A összefüggősége is.

3. Legyen Q egy véges összefüggő tegez, I egy elfogadható ideál és $A = KQ/I$ a kötött algebra. Akkor a fent értelmezett konstrukció a várt eredményt adja, vagyis $Q_A = Q$.

4. $\dim_K e_i(\text{rad } A/\text{rad}^2 A)e_j = \dim_K \text{Ext}^1_A(S_i, S_j)$, tehát az Ext-csoportokat is használhatjuk a fenti értelmezésben. Ezért is szokás Q_A-t Ext-tegeznek nevezni.

Az ígért tétel:

8. Tétel. *Legyen A összefüggő véges dimenziós bázisalgebra. Akkor létezik egy elfogadható I KQ_A-ideál úgy, hogy $A \cong KQ_A/I$. Fordítva, ha Q egy összefüggő véges gráf, I egy elfogadható ideálja KQ-nak, akkor KQ/I kötött algebra véges dimenziós összefüggő bázisalgebra.*

Láttuk az előző fejezetben, hogy reprezentációelméleti szempontból elég összefüggő bázisalgebrákról beszélnünk. Tehát az algebrák melyek érdekelnek kötött útalgebrák. Megjegyezzük, hogy Q_A nem feltétlenül körmentes. Ha körmentes, akkor indukcióval igazolható, hogy a globális dimenziója véges, pontosabban legfeljebb $|(Q_A)_0| - 1$, ahol $|(Q_A)_0|$ a csomópontok száma, vagyis az egyszerű modulusok száma (rank $K_0(A)$, a Grothendieck-csoport rangja).

3.3. Reprezentációk

Sikerült egy algebrát egy „relációs” gráffal azonosítani; felmerül a kérdés, hogy tudnánk a modulusait vizualizálni? Erre is van egy nagyon természetes módszer.

13. Definíció. Legyen Q egy véges tegez. Egy reprezentáció M alatt a következőt értjük:

1. Minden $a \in Q_0$-hoz egy K-vektorteret társítunk, M_a.

2. Minden nyílhoz $\alpha : a \to b \in Q_1$ társítunk egy $\phi : M_a \to M_b$ lineáris függvényt.

Egy reprezentációt röviden $M = (M_a, \phi_\alpha)$ jelölünk. Véges dimenziós egy reprezentáció, ha mindegyik M_a vektortér véges dimenziós.

Ha van két reprezentáció $M = (M_a, \phi_\alpha), M' = (M'_a, \phi'_\alpha)$, akkor $f : M \to M'$ reprezentációmorfizmus egy család $f = (f_a)_{a \in Q_0}$, ahol $f_a : M_a \to M'_a$, $a \in Q_0$ lineáris függvények, melyek kompatíbilisek ϕ_α függvényekkel, vagyis, minden $\alpha : a \to b$ nyílra a következő diagramm kommutatív:

$$\begin{tikzcd} M_a \arrow[r, "\phi_\alpha"] \arrow[d, "f_a"] & M_b \arrow[d, "f_b"] \\ M'_a \arrow[r, "\phi'_\alpha"] & M'_b \end{tikzcd}$$

Két reprezentáció-morfizmus összetétele a megfelelő lineáris függvények összetételéből származik az egyértelmű módon. A kapott kategóriát Rep Q-val jelöljük. A véges dimenziós reprezentációk alkategóriáját rep Q-val jelöljük.

Ha $w = \alpha_1, \dots \alpha_n$ egy út Q-ban, akkor jelölje $\phi_w = \phi_{\alpha_n} \dots \phi_{\alpha_1}$ Most vegyünk egy kötött tegezt (Q, I), és legyen $w = \sum_{i=1}^{m} k_i u_i \in I$ egy reláció. Az mondjuk, hogy M reprezentáció teljesíti w-t, ha $\phi_w = \sum_{i=1}^{m} k_i \phi_{u_i} = 0$. Legyen I egy elfogadható ideál. M reprezentáció kötött I által, ha M I-nek minden relációját teljesíti. Tehát, ha $I = \langle w_1, \dots w_n \rangle$, akkor a kötés ekvivalens avval, hogy $\phi_{w_i} = 0$, minden $i \in \mathbb{N}$-re.

Jelölje $\mathrm{Rep}(Q, I)$ (illetve $\mathrm{rep}(Q, I)$) azt az alkategóriáját $\mathrm{Rep}\, Q$ (illetve $\mathrm{rep}\, Q$)-nek, melynek reprezentációi I által kötöttek. A következő tétel azt mondja, hogy a reprezentáció ugyanaz, mint a modulus.

9. Tétel. *Legyen Q egy véges összefüggő gráf, I egy elfogadható ideálja KQ-nak, $A = KQ/I$ a kötött útalgebra. Akkor létezik F kategória-ekvivalencia*

$$F : Mod - A \xrightarrow{\cong} \textbf{\textit{Rep}}(Q, I)$$

melynek leszűkítése

$$F : mod - A \xrightarrow{\cong} \textbf{\textit{rep}}(Q, I)$$

Tehát szabadon használhatjuk a reprezentáció helyett a modulus szót. Az első fejezetben meghatároztuk az egyszerű, a felbonthatatlan projektív, illetve a felbonthatatlan injektív modulusokat. Az alábbi tétel ezek természetesebb jellemzése tegez-szempontból.

10. Tétel. *(Releváns modulusok jellemzése, tegez verzió) Legyen Q egy véges összefüggő tegez, a csomópontokat számozzuk 1-től n-ig, I egy elfogadható ideálja KQ-nak, és $A = KQ/I$ a kötött útalgebra.*

1. *Az egyszerű modulusok S_i:*

   A vektorterek $(S_i)_j = 0$, ha $i \neq j$, és $(S_i)_i = K$, a közöttük levő lineáris függvények pedig 0-k.

2. *A felbonthatatlan projektív modulusok P_i:*

   $(P_i)_j$ bázisa az összes $w + I$ alakú elem, ahol w egy út i-től j-ig, a közöttük levő lineáris függvényeket pedig a nyilakkal való jobb oldali szorzások indukálják.

3. *A felbonthatatlan injektív modulusok I_i:*

   $(I_i)_j$ bázisa az összes $w + I$ alakú elem, ahol w egy út j-től i-ig, a közöttük levő lineáris függvényeket pedig a nyilakkal való bal oldali szorzások duálisai indukálják.

Vegyünk egy szemléltető példát:

6. Példa. Legyen Q a következő tegez:

$$\begin{tikzcd}
 & \circ_1 \arrow[dr, "\beta"] & \\
\circ_3 \arrow[ur, "\alpha"] & & \circ_2 \arrow[ll, shift right, "\gamma"'] \arrow[ll, shift left, "\delta"]
\end{tikzcd}$$

és a kötés $\alpha\beta = 0$ (vagyis $I = \langle \alpha\beta \rangle$, ami nyilván elfogadható, és legyen $A = KQ/I$ kötött útalgebra)

Az egyszerű modulusok:

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dr, "0"] & \\ 0 \arrow[ur, "0"] & & 0 \arrow[ll, shift right, "0"'] \arrow[ll, shift left, "0"] \end{tikzcd}$$

S_1

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr, "0"] & \\ 0 \arrow[ur, "0"] & & K \arrow[ll, shift right, "0"'] \arrow[ll, shift left, "0"] \end{tikzcd}$$

S_2

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr, "0"] & \\ K \arrow[ur, "0"] & & 0 \arrow[ll, shift right, "0"'] \arrow[ll, shift left, "0"] \end{tikzcd}$$

S_3

A felbonthatatlan projektív modulusok:

$$\begin{tikzcd} & K^3 \arrow[dr, "{\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}}"] & \\ K^2 \arrow[ur, "{\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}}"] & & K \arrow[ll, shift right, "{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}"'] \arrow[ll, shift left, "{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}"] \end{tikzcd}$$

P_1

$$\begin{tikzcd} & K^2 \arrow[dr, "0"] & \\ K^2 \arrow[ur, "{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}}"] & & K \arrow[ll, shift right, "{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}"'] \arrow[ll, shift left, "{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}"] \end{tikzcd}$$

P_2

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dr, "0"] & \\ K \arrow[ur, "1"] & & 0 \arrow[ll, shift right, "0"'] \arrow[ll, shift left, "0"] \end{tikzcd}$$

P_3

A felbonthatatlan injektív modulusok:

$$\begin{tikzcd} & K^3 \arrow[dr, "{\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}"] & \\ K \arrow[ur, "{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}"] & & K^2 \arrow[ll, shift right, "{\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}}"'] \arrow[ll, shift left, "{\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}}"] \end{tikzcd}$$

I_1

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dr, "1"] & \\ 0 \arrow[ur, "0"] & & K \arrow[ll, shift right, "0"'] \arrow[ll, shift left, "0"] \end{tikzcd}$$

I_2

$$\begin{tikzcd} & K^2 \arrow[dr, "1"] & \\ K \arrow[ur, "0"] & & K^2 \arrow[ll, shift right, "{\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}}"'] \arrow[ll, shift left, "{\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}}"] \end{tikzcd}$$

I_3

3.4. Auslander-Reiten-féle tegez

Miután az algebrát és modulusait vizualizáltuk, következik a modulus kategória.

14. Definíció. Legyen A egy véges dimenziós algebra, $X, Z \in mod - A$ felbonthatatlan modulusok. Egy X-ben kezdődő (vagy Z-ben végződő) nem felhasadó rövid egzakt sorozatot akkor nevezünk Auslander-Reiten sorozatnak (vagy majdnem-felhasadó sorozat)

$$0 \to X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} Z \to 0$$

ha teljesíti az ekvivalens állítások valamelyikét:

1. bármely $U \to Z$ homomorfizmus, mely nem izomorfizmus és U felbonthatatlan, felbomlik p-n keresztül;

2. bármely $X \to V$ homomorfizmus, mely nem izomorfizmus és V felbonthatatlan, felbomlik i-n keresztül.

11. Tétel. *(A-R sorozatok létezési tétele)*

1. *Ha Z nem projektív, akkor létezik Z-ben végződő A-R sorozat, mitöbb, X egyértelműen meghatározott (izomorfizmustól eltekintve). Azt mondjuk, hogy X modulus Z-nek a transzlációja, és a transzlációt τ jelöli (tehát $\tau Z = X$).*

2. *Duálisan, ha X nem injektív, akkor létezik X-ben kezdődő A-R sorozat, mitöbb, Z egyértelműen meghatározott (izomorfizmustól eltekintve). Azt mondjuk, hogy Z modulus X-nek a kotranszlációja, és a kotranszlációt τ^{-1} jelöli (tehát $\tau^{-1}X = Z$).*

Az A-R sorozat úgymond a legjelentősebb morfizmusokat foglalja magába, az irreducibiliseket. Az Auslander-Reiten tegez a következő

15. Definíció. Legyen A egy K-algebra, rad(U, V) a nem izomorfizmusok U és V felbonthatatlanok között. Tulajdonképpen, ha $U \ncong V$, akkor rad$(U, V) = \hom(U, V)$ és rad(U, U) pedig a Jacobson-radikál. Jelölje Irr(U, V) =rad(U, V)/rad$^2(U, V)$ az irreducibilis morfizmusok vektorterét. Definíció szerint az Auslander-Reiten tegezt $\Gamma(A)$ a következő módon szerkesztjük meg:

1. a csomópontok az irreducibilis modulusok izomorfizmus osztályai $[U]$;

2. $[U]$ és $[V]$ között a nyilak száma megegyezik dim$_K$Irr(U, V) dimenzióval.

Példát majd a Derivált kategóriák fejezetben mutatunk be.

Az Auslander-Reiten sorozatokkal építjük fel ezeket a (transzlációs) tegezeket, mert a következő különleges „hálószerű” komponensekből tevődnek össze:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & [Y_1] & & \\
 & \nearrow \cdots \nearrow & \vdots & \searrow \cdots \searrow & \\
[\tau Z] & & \vdots & & [Z] \\
 & \searrow \cdots \searrow & \vdots & \nearrow \cdots \nearrow & \\
 & & [Y_t] & &
\end{array}
$$

ahol Z nem projektív, és egy adott $i \in \mathbb{N}$ számra a τZ-ből Y_i-be menő nyilak száma megegyezik az Y_i-ból Z-ba menő nyilak számával.

Egy algebra véges reprezentációjú, ha véges számú páronként nem izomorf felbonthatatlan modulusa van (Vagyis az A-R tegeze véges). Gabriel [1972] osztályozta az öröklődő véges reprezentációjú algebrákat, melyeknek az Ext-tegezük a mindenütt jelenlévő Dynkin-féle diagrammok.

4. fejezet

Derivált kategóriák

4.1. Bevezetés

A derivált kategória $D\mathcal{A}$ egy általános konstrukció a homológikus algebrában egy $\mathcal{A}$ Ábel-kategóriából kiindulva. Alexandre Grothendieck és tanítványa Jean-Louis Verdier vezették be a 60-as években, valoszínűleg a derivált funktorok elméletének egyszerűsítése végett. Ők komplexeken értelmezték ezeket. A konstrukció lényege, hogy komplexek közötti morfizmust akkor akaruk izomorfizmussá alakítani, ha az indukált homológiacsoportokon izomorfizmusokat alkot. Bővebben derivált kategóriákról $Happel$ [1988]; $Weibel$ [1994].

4.2. A komplexek kategóriája

Legyen $\mathcal{A}$ egy Ábel-kategória (minket $Mod - A$ vagy $mod - A$ érdekel, ezek Ábel-kategóriák, ezentúl mindig ezekkel dolgozunk). Egy komplex X a $\mathcal{A}$ fölött a következő diagramm:

$$\cdots \to X^{n-1} \stackrel{d^n}{\to} X^n \stackrel{d^{n-1}}{\to} X^{n+1} \to \dots$$

úgy, $X^n \in \mathcal{A}$, $d^n \in \hom(M^n, M^{n+1})$ hogy $d^{n-1} \circ d^n = 0$, minden $n \in \mathbb{Z}$. d^n helyett valamikor csak d-t írunk, mikor nem vezet félreértéshez, és differenciálnak nevezzük. Tehát röviden $d \circ d = 0$.

$f = (f^n)_{n\in\mathbb{Z}} : X \to Y$ komplexmorfizmus egy morfizmuscsalád, amely diagramm-morfizmus, vagyis az alábbi diagrammot kommutatívvá teszi:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^n \arrow[r, "d^n"] \arrow[d, "f^n"] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^n \arrow[r, "\delta^n"] & Y^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Komplexmorfizmusok összetétele természetes. Megkaptuk a komplexek kategóriáját, $C\mathcal{A}$.

Egy komplexmorfizmus mindig csoportmorfizmusokat indukál a homológiacsoportokon $f_*^n : H^nX \to H^nY$, $f_*^n[x] = [f_*^n(x)]$, $n \in \mathbb{Z}$ (ahol H^nX =ker d^n/im d^{n-1}).

A homotópia is algebrai topológiából származik; az absztrakciója:

Egy $f : X \to Y$ komplexmorfizmus akkor null-homotóp, ha léteznek $h^n : X^n \to Y^{n-1}$ morfizmusok úgy, hogy $f^n = \delta^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ d^n$, röviden $f = d \circ h + h \circ d$. A null-homotóp morfizmusok egy ideált képeznek a komplexek kategóriájában, tehát beszélhetünk a faktorkategóriáról, $H\mathcal{A}$, amelyet homotópia kategóriának nevezünk (tehát ennek objektumai szintén a komplexek, és a morfizmusok a komplexmorfizmusok modulo homotópia, vagyis két morfizmus megegyezik, ha különbségük null-homotóp).

Vegyük észre, hogy a homológia funktorok $X \to H^n X$ értelmezettek lesznek a homológia kategórián is, mert ha $x \in \ker d$, $f - f' = d \circ h + h \circ d$, akkor $f_*[x] - f'_*[x] = [d \circ h(x) + h \circ d(x)] = [d(h(x))] = 0$ (a függvények indexeit nem írtuk ki).

$H\mathcal{A}^+$, $H\mathcal{A}^-$, $H\mathcal{A}^b$ a balról-, jobbról-, illetve mindkét oldalról korlátos komplexek homotópia kategóriája.

Egy s morfizmust $H\mathcal{A}$-ból kvázi-izomorfizmusnak nevezünk, ha izomorfizmusokat származtat a homológia csoportokon. Ezeket definiálhatjuk természetesen $C\mathcal{A}$ komplexek kategóriáján is, de a homológia kategórián érdekes tulajdonságokkal rendelkeznek. Tulajdonképpen azért vezettük be a homotópia kategóriákat, hogy ezekből építsük fel a derivált kategóriát, mely morfizmusait így explicitebb módon fogjuk megkapni, mintha direkt $C\mathcal{A}$-ból indultunk volna ki.

4.3. A derivált kategória

Jelölje S a kvázi-izomorfizmusok halmazát. Szeretnénk lokalizálni a kategóriát S-el, hasonló módon, mint a gyűrűknél. Az Ore-feltételekhez hasonló feltételeket (melyek utóbbit biztosítják egy általánosabb környezetben) kapunk S-re.

16. Definíció. Jelölje $D\mathcal{A}$ a derivált kategóriát. Ennek objektumai szintén a komplexek, és morfizmusok X, Y között $s^{-1}f$ bal tört alakúak (vagy jobb tört), vagyis ekvivalencia osztályok

$$\begin{tikzcd} & M & \\ X \arrow[ur, "f"] & & Y \arrow[ul, "s"'] \end{tikzcd}$$

Két morfizmus $s^{-1}f$ és $s'^{-1}f'$ ekvivalens, ha létezik egy kommutatív diagram $H\mathcal{A}$-ban:

$$\begin{tikzcd} & M' \arrow[d] & \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f''"] \arrow[dr, "f'"'] & M'' & Y \arrow[ul, "s"'] \arrow[l, "s''"] \arrow[dl, "s'"] \\ & M' \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

Két morfizmust a törtek szorzásával hasonló módon teszünk össze (csak előbb a morfizmusokat „közös nevezőre” kell hozni).

A kanonikus (trianguláris, lásd később)funktor $Q : H\mathcal{A} \to D\mathcal{A}$ a kvázi-izomorfizmusokat izomorfizmusokba küldi, és univerzális ezzel a tulajdonsággal.

$D\mathcal{A}^+$, $D\mathcal{A}^-$, $D\mathcal{A}^b$ a balról-, jobbról-, illetve mindkét oldalról korlátos homológiájú komplexek derivált kategóriája.

Minden $M \in \mathcal{A}$ modulust $\dots \to 0 \to M \to 0 \to \dots$ komplexxel azonosítunk, ahol M a 0 pozícióban áll. Ha X egy tetszőleges komplex, akkor az eltolt komplex $X[n] : X[n]^k = X^{n+k}$, és $d_{X[n]} = (-1)^n d_X$.

A következőkben egy másik definícióját adjuk az Ext-csoportoknak.

3. Segédtétel. *Legyen X egy komplex. Ha I egy alulról korlátos komplex injektív modulusokkal, akkor*

$$\hom_{D\mathcal{A}}(X, I) \cong \hom_{H\mathcal{A}}(X, I)$$

Duálisan, ha P egy fölülről korlátos komplex projektív modulusokkal, akkor

$$\hom_{D\mathcal{A}}(P, X) \cong \hom_{H\mathcal{A}}(P, X)$$

3. Tulajdonság. *Legyen $M, N \in \mathcal{A}$. Akkor létezik egy kanonikus izomorfizmus $\sigma : Ext^n(M, N) \xrightarrow{\cong} \hom_{D\mathcal{A}}(M, N[n])$, $n \in \mathbb{Z}$, ahol $Ext^n(M, N) = 0$, ha $n < 0$.*

Bizonyítás. Legyen I egy injektív feloldása N-nek, akkor ez kvázi-izomorf is vele, tehát

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & I^0 & \longrightarrow & I^1 & \longrightarrow & I^2 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Tehát $D\mathcal{A}$-ben $N \cong I$,

$$\hom_{D\mathcal{A}}(M, N[n]) \cong \hom_{D\mathcal{A}}(M, I[n])$$

Az előző segédtétel alapján

$$\hom_{D\mathcal{A}}(M, I[n]) \cong \hom_{H\mathcal{A}}(M, I[n])$$

Azonnali, hogy utóbbi pontosan $\hom_A(M, I)$ komplexnek az n-edik homológia csoportja, tehát $\mathrm{Ext}^n_A(M, N)$.

$\square$

A derivált funktorokat a derivált kategóriákban hasonlóan injektív (vagy projektív) feloldásokkal szerkesztjük meg: lásd Weibel [1994], 10. fejezet, vagy Gelfand és Manin [1996], 3. fejezet. Általánosabb (és absztraktabb) szerkesztéshez lásd Keller [2007].

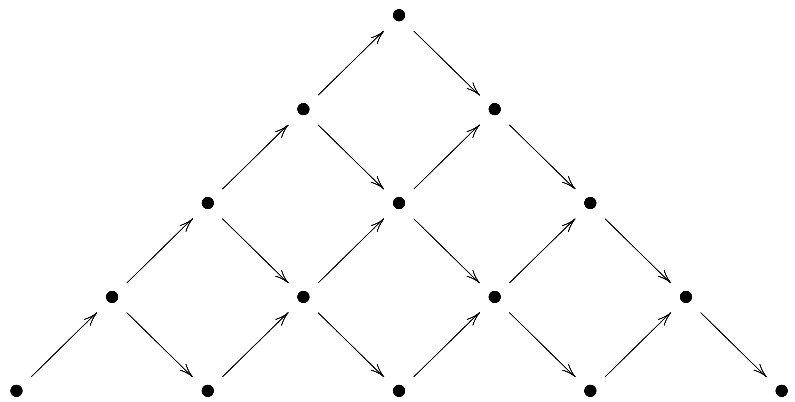
Sajnos a derivált kategória csak triviális esetekben Ábel-kategória (szemi-egyszerű kategóriákban, pl. vektoterek). Mégis természetes környezet homológikus algebra eszközök alkalmazására, mert egy úgynevezett trianguláris kategória. Utóbbiról például $Keller$ [2007] ad bevezetőt, bővebben róluk pedig Gelfand és Manin [1996]. Itt nem részletezzük axiómáit, alap tulajdonságait. A háromszögek $X \to Y \to Z \to X[1]$ lényegében komplexekből álló egzakt sorozatból származnak: $0 \to X \to Y \to Z \to 0$.

A modulus kategóriák esetéhez hasonlóan, értelmezhetjük az Auslander-Reiten tegezét egy tetszőleges $D^b_{\mathcal{A}}$ korlátos derivált kategóriának. Jelölése: $\Gamma(D^b_{\mathcal{A}})$. Ugyanazok a lépések, mint a modulus kategória esetén, a megfelelő helyettesítésekkel (pl. felbonthatatlan modulusok helyett $D^b_{\mathcal{A}}$ derivált kategória (amely additív) felbonthatatlan objektumait vesszük) Az Auslander-Reiten sorozatokat helyettesítik az Auslander-Reiten háromszögek, ezek ugyanazokkal az általános tulajdonságokkal rendelkeznek.

Az öröklődő derivált kategóriákat meglehetősen egyszerű ábrázolni. Vegyünk az útalgebrát (ismét a teljes trianguláris mátrixalgebra):

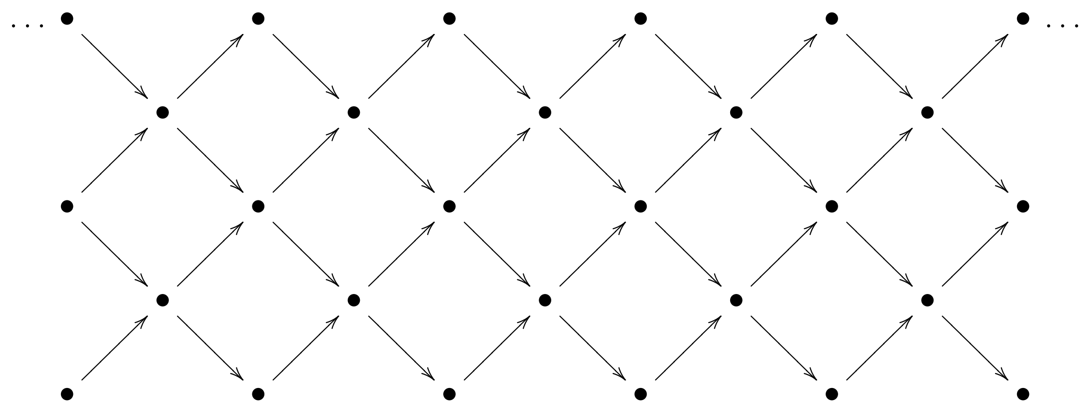
$$A_n : 1 \leftarrow 2 \leftarrow \cdots \leftarrow n$$

Vegyük $Q = A_5$, $A = KQ$. Könnyű belátni, hogy a $A - mod$ Auslander-Reiten tegeze:



A fenti „háromszög” bal szárát képezik a projektív modulusok, jobb szárát az injektívek, a csúcsa pedig projektív-injektív.

A derivált kategória $D^b(mod - A)$ (végtelen) A-R tegeze



Vegyük észre, hogy ha módosítjuk a nyilak irányát, például legyen $Q : 1 \leftarrow 2 \leftarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$, akkor más moduluskategória A-R tegezt kapunk. De a derivált A-R tegez ugyanaz. Ez a két algebra derivált ekvivalenciájából adódik lásd Happel tételét a következő fejezetben.

5. fejezet

Tiltingelmélet

5.1. Bevezetés

Láttuk, hogy a Morita-ekvivalencia egy erős eszköz, de miután bázisalgebrákkal dolgozunk, többé használható. Tehát nem lehet számítani ekvivalens modulus kategóriákra különböző bázisalgebráktól. Viszont észrevettek hasonlóságokat különböző moduluskategóriák között, lásd pld. Berstein et al. [1973]. Ötleteiket Lie elméletből merítették, és az úgynevezett reflexió funktorok eszközével egy elegáns bizonyítás található a Gabriel-tételre, amely osztályozza a véges reprezentációjú öröklődő algebrákat a Dynkin-diagramokkal. Lásd Auslander et al. [1979] ennek általánosítását az úgynevezett APR-tilting modulusok használatával. A tilting elméletet tovább általánosították és alkalmazták.

5.2. Tilting-modulus

Legyen A egy véges dimenziós K-algebra. Többfajta definíciója van a tilting-modulusoknak, attól függően, hogy hol használjuk őket. A klasszikus ez:

17. Definíció. Egy $T \in mod - A$ modulust akkor nevezünk tilting-modulusnak, ha teljesíti az alábbiakat:

(T1) T projektív dimenziója legfeljebb 1,

(T2) $\mathrm{Ext}^1_A(T, T) = 0$, és

(T3) Létezik egy egzakt sorozat $0 \to A_A \to T^0 \to T^1 \to 0$ úgy, hogy $T^i \in add - T$ (vagyis T direkt összeadandóinak egy direkt összege).

Ha csak az első két tulajdonság teljesül, akkor T parciális tilting-modulus. Ez az elnevezés onnan jön, hogy ha T egy parciális tilting modulus, akkor egy tilting modulusnak a direkt összeadandója. Sőt, egy parciális tilting-modulus akkor és csak akkor tilting, ha a páronként nem izomorf felbonthatatlan direkt összeadandóinak a száma megegyezik a páronként nem izomorf egyszerű csoportok számával (vagyis rank $K_0(A)$, ahol $K_0(A)$ a Grothendieck-csoport). Tehát (T3) helyettesíthető utóbbi egyszerűbb jellemzéssel.

Megjegyzés: Mivel T proj. dim.-ja ≤ 1, egyértelmű, hogy $\mathrm{Ext}^i_A(T, T) = 0$, $i \geq 1$-re is (lásd átilt.).

Legyen T egy tilting-modulus. Világos, hogy T „közel áll” egy progenerátorhoz. Hasonlóan vizsgáljuk az endomorfizmusalgebráját, $B = End_A T_A$. Világos, hogy ${}_BT$ egy bal B-modulus is egyben. A következő torzió páros Assem et al. [2006] (vagyis nincs a null morfizmuson kívül más morfizmus az első objektumaiból a másodikéba, és a két kategória maximális evvel a tulajdonsággal) értelmezhető $mod - A$ és $mod - B$ között.

Legyen $\mathcal{T}$ a $mod - A$ azon telt alkatógiája, melynek objektumait T generálja, ami ekvivalens avval, hogy $X \in \mathcal{T}$ akkor és csakis akkor, ha $\mathrm{Ext}^1_A(T, X) = 0$. Legyen $\mathcal{F}$ azon telt alkategóriája $mod - A$ kategóriának, mely pontosan azokat az X objektumokat tartalmazza, melyekre $\hom_A(T, X) = 0$. Akkor $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ egy torzió páros.

Legyen $\mathcal{X}$ azon telt alkategóriája $mod - B$ kategóriának, mely pontosan azokat az Y B-modulusokat tartalmazza, melyekre $Y \otimes_B T = 0$, és legyen $\mathcal{Y}$ azon telt alkategóriája $mod - B$ kategóriának, mely pontosan azokat az Y B-modulusokat tartalmazza, melyekre $Tor^B_1(Y, T) = 0$. Akkor $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ szintén torzió páros. A következő Brenner és Butler [1980] a Brenner-Butler- vagy tilting-tétel:

12. Tétel. *(Brenner-Butler) Legyen A egy véges dimenziós K-algebra, T_A egy tilting-modulus, $B = EndT_A$, és $(\mathcal{T}, \mathcal{F}), (\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ a fent származtatott torzió párosok. Ekkor a igaz:*

1. *${}_BT$ is tilting modulus, és a kanonikus K-algebra morfimus $A \to End({}_BT)^{op}$ izomorfizmus $(a \mapsto (t \mapsto ta))$.*
2. *$\hom_A(T, -)$ és $- \otimes_B T$ ekvivalenciát származtatnak $\mathcal{T}$ és $\mathcal{Y}$ között.*
3. *$Ext^1_A(T, -)$ és $Tor^B_1(-, T)$ ekvivalenciát származtatnak $\mathcal{F}$ és $\mathcal{X}$ között.*

Egy bő bevezetőként a tiltingelméletbe ajánljuk ismét a Assem et al. [2006] és Happel [1988] könyveket.

5.3. Általánosított tilting-modulusok

Egyesek az általánosított tilting-modulusokat nevezik tilting-modulusoknak. Mi rövidítsük őket átilt.-el. A következő a definíció:

Legyen A egy K-algebra. Akkor T egy átilt, ha teljesülnek:

(T1) T projektív dimenziója véges,

(T2) $\mathrm{Ext}^i_A(T, T) = 0$, mikor $i > 0$.

(T3) Létezik egy egzakt sorozat $0 \to A_A \to T^0 \to T^1 \to \cdots \to T^m \to 0$ úgy, hogy $T^i \in add - T$

Nyilván minden tilting-modulus átilt. Általános tilting-modulusokra is sok eredmény kiterjeszthető, lásd pl. Happel [1988]. A tenzor szorzat funktorát (illetve a homomorfizmus funktort) ki szeretnénk terjeszteni a derivált kategóriákra, ahol komplexekkel dolgozunk. Ezek a totális derivált funktorok. Ha X egy $A - B$ komplex (komponensei $A - B$ bimodulusok), jelölje a totális derivált funktorokat $- \otimes^L_A X : D(Mod - A) \to D(Mod - B)$, illetve $\mathbf{R}\hom_B(T, -) : DMod - B \to DMod - A$ (részletek Weibel [1994]).

Amiért igazán érdekesek az átilt.-ek, az a következő tétel Happel [1987]:

13. Tétel. *(Happel tétele) Legyen* $X = T$ *egy* $A - B$ *bimodulus (egy tagú komplex). Akkor fenti totális derivált funktorok akkor és csak akkor képeznek ekvivalenciát, ha* T_B *egy átilt., és a kanonikus függvény* $A \to \hom_B(T, T)$ *egy izomorfizmus, mitöbb, a totális derivált funktorok* $D^b(mod - A)$ *és* $D^b(mod - B)$ *között is ekvivalenciát származtatnak.*

A fenti tétel nagyon hasonlít Morita tételére, egy absztraktabb környezetben. Mint kiderült, az általános tilting-modulus nem származtat minden derivált ekvivalenciát. Ezt a problémát oldja meg a tilting-komplex.

5.4. Tilting-komplexek

Jelölje per B a perfekt komplexek trianguláris alkategóriáját $D(Mod - B)$-nek, vagyis az összes olyan komplexet, mely kvázi-izomorf egy olyan korlátos komplexxel, melynek komponensei végesen generált projektív modulusok. A következő a fő tételünk Rickard [1989, 1991]:

14. Tétel. *(Rickard tétele) Legyen* K *kommutatív test,* A *és* B *véges dimenziós* K*-algebrák. A következő állítások ekvivalensek:*

1. *Létezik egy trianguláris ekvivalencia* $F : D(Mod - A) \to D(Mod - B)$.
2. *Létezik egy trianguláris ekvivalencia* $F' : D^b(mod - A) \to D^b(mod - B)$.
3. *Létezik egy kétoldali* X *tilting-komplex, vagyis egy* $A - B$ *komplex, amelyik perfekt mint bal* A*-modulus, és mint jobb* B*-modulus és amelyre* $- \otimes_A X : D(Mod - A) \to D(Mod - B)$ *ekvivalencia. Ezt standard ekvivalenciának nevezzünk (ha nem testek felett dolgozunk, akkor itt a totális derivált funktor szerepel).*
4. *Létezik egy* T *tilting-komplex* $D(Mod - B)$*-ben, vagyis egy komplex, melyre:*

   (T1) T *perfekt komplex;*

   (T2) $\hom_{DB}(T, T[n]) = 0$, *mikor* $n \neq 0$, *és* $\hom_{DB}(T, T) \cong A$;

   (T3) $add - T$ *generálja* $per B$*-t, mint trianguláris kategóriát.*

7. *Megjegyzés.*

– Még nyílt kérdés, hogy minden trianguláris ekvivalencia izomorf-e egy standard ekvivalenciával (ellenben a Morita-tétellel).

– Ezek a feltételek ismét nagyon hasonlítanak az eddigiekhez, tulajdonképpen a természetes módosításai azoknak. Ez az eredmény már csak azért is meglepő, mert komoly problémákba ütközünk, ha Happel tételét próbáljuk utánozni. A 3)-ból bizonyítani a többit a nehéz része a bizonyításnak, mert, bár A hat T-re, mint annak endomorfizmus algebrája, de feltétlenül hat a komponenseire, tehát azok nem feltétlenül bimodulusok, mint 2)-ben. Lásd König és Zimmermann [1998] 3.,6. fejezetekben is szerepelnek a klasszikus bizonyítások. Egy másik, átláthatóbb bizonyítást szolgál Keller [1998].

– Ezzel az (eddig ismert) fő Morita-típusú tételeket bemuttatuk. Egyéb hasonló irányzatok a megfelelő környezetekre való kiterjesztésük, például szimmetrikus algebrákra König és Zimmermann [1998], vagy graduált algebrákra Marcus [2003].

– A derivált ekvivalencia is megőriz néhány klasszikus invariánst:

(I1) A $Z(A)$ center, partikulárisan két kommutatív algebra izomorf akkor és csak akkor ha derivált kategóriájuk ekvivalensek;

(I2) $K_0(A)$ Grothendieck csoport, illetve a magasabb K-csoportok $K_i(A)$;

(I3) A Hochschild kohomológia-csoportok $HH^*(A, A)$;

(I4) Ciklikus kohomológia-csoportok $HC_*(A)$;

(I5) Stb.

Irodalomjegyzék

Assem, I., Simson, D., és Skowronski, A. *Elements of the representation theory of associative algebras*, volume 1. Cambridge University Press, 2006.

Auslander, M., Platzeck, M. I., és Reiten, I. Coxeter functors without diagrams. *Trans. Amer. Math. Soc.*, (250):1–46, 1979.

Auslander, M., Reiten, I., és Smalo, S. O. *Representation theory of Artin algebras*. Cambridge University Press, 1995.

Berstein, I. N., Gelfand, I., és Ponomarev, V. Coxeter functors and Gabriel's theorem. *Uspiehi Mat. Nauk*, (28), 1973.

Brenner, S. és Butler, M. Generalizations of the Berstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors. *Lecture Notes in Math.*, (832):103–69, 1980.

Gabriel, P. Unzerlegbare darstellungen I. *Manuscripta Math.*, (6):71–103, 1972.

Gelfand, S. I. és Manin, Y. I. *Methods of Homological Algebra*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

Happel, D. On the derived category of a finite-dimensional algebra. *Comment. Math. Helv.*, 62 (3):339–389, 1987.

Happel, D. *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*. London Mathematical Society Lecture Note Series 119, Cambridge University Press, 1988.

Jacobson, N. *Basic Algebra II*. W. H. Freeman and Company, second edition, 1989.

Keller, B. Derived categories and tilting. *London Math. Soc. Lecture Note Series*, (332):49–104, 2007.

Keller, B. On the construction of triangle equivalences. *Lecture Notes in Mathematics*, (1685): 155–176, 1998.

König, S. és Zimmermann, A. *Derived equivalences for group rings*. Springer-Verlag, 1998.

Marcus, A. Tilting complexes for group graded algebras. *J. Group Theory*, 6(2):175–193, 2003.

Morita, K. Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition. *Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku*, 6:83–142, 1958.

Rickard, J. Morita theory for derived categories. *J. London Math. Soc.*, 39:303–317, 1989.

Rickard, J. Derived equivalences as derived functors. *J. London Math. Soc.*, 43(1):37–48, 1991.

Weibel, C. A. *An introduction to homological algebra*. Cambridge University Press, 1994.