Egy nem-arkhimédészi számtest. Analitikus függvények differenciálhatósága. Differenciálegyenletek

XII. Erdélyi Tudományos Diákköri Konferencia
Kolozsvár, 2009. május 15-17

Szerző: Mészáros Alpár Richárd, BBTE, MIK
Matematika-Informatika szak, II. év
Témavezető: dr. András Szilárd, adjunktus BBTE, MIK,
Differenciálegyenletek tanszék

Kivonat

A dolgozatban Levi-Civita[1] nem-arkhimédészi számtest és később Laugwitz[2] formális hatványsorai mintájára, de tőle függetlenül Wang[3] által bevezetett általánosított számok rendszerét(**GNS**) fogjuk vizsgálni. Alapvető értelmezéseket adunk meg, majd az analízis elemeit, mint folyonosság, differenciálhatóság, integrálhatóság fogalmait ismertetjük, építjük fel Wang mintájára. A továbbiakban a formális hatványsorok tulajdonságaira támaszkodva, analitikus függvények differenciálhatóságát vizsgáljuk **GNS**-en. Majd differenciálegyenleteket próbálunk értelmezni és ezek megoldhatóságát vizsgálni ugyancsak a **GNS** számtesten.

Kulcsszavak: általánosított számok rendszere(**GNS**), **GNS**- differenciálhatóság, **GNL**-integrálhatóság, formális hatványsorok, analitikus függvények, differenciálegyenletek.

[1]Tullio Levi-Civita, 1892
[2]Detlef Laugwitz, 1968
[3]Shu-Tang Wang, 1985

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

Annak ellenére, hogy a klasszikus és modern matematikai eredmények nagy része úgymond *egy szintes tereken* „zajlik”, mint például a valós számegyenes, a sík, az n-dimenziós Euklidészi tér, stb., az emberi elme az univerzum többszintes organikus strukturákit keresi már az ókor óta.

Az általános rendszerek struktúrája többszintes ([1]).

Wang modern fizikai problémák tisztázása végett vezette be az általánosított számok rendszerét ([2], [3]). (A továbbiakban csak **GNS**-t használunk az egyszerűség kedvéért)

1.1. Néhány hipotézis a modern fizikában

1.1.1. A foton nyugalmi tömege

Einstein szerint, egy mozgó részecske tehetetlenségi tömege, m, összefüggésben van a nyugalmi tömegével, m_0:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ahol c a fénysebesség és v a részecske sebessége. A foton esetében amikor a sebessége $v = c$, a nyugalmi tömege nulla kellene legyen. Ebben az esetben $m = \infty$, ami viszont ellentmondás. De a nyugalmi tömege ha nulla, akkor a fenti egyenlőség esetében $\frac{0}{0}$ eset következik be, ami határozatlan, ismét ellentmondás. Ezt az ellentmondást a klasszikus elméletben úgy küszöbölik ki, hogy az univerzumban egyetlen test sem érheti el a fénysebességet, mert akkor a tömege kellene tartson a nullához.

1.1.2. A Dirac féle δ függvény

Dirac[4] jól ismert munkájában a következő függvényt vezette be, ami később Dirac-féle δ függvénynek nevezük:

$$\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \neq 0 \\ \infty, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Ha $f(x)$ egy olyan függvény $\mathbb{R}$-en, amely végtelenszer differenciálható, és kompakt tartója(supp$f(x)$) van, akkor:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0)$$

[4]Paul A. M. Dirac, 1958

kellene teljesüljön.

De a klasszikus matematikában, beleértve a modern mértékelméletet, lehetetlen egy ilyen függvényt szerkeszteni, mert minden függvény, amelyre teljesülnek a fenti követelmények és $\delta(x) = 0, \forall \quad x \in \mathbb{R}^*$ a következő integrál értéke nulla, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = 0$. Ez a tény egy újabb ellentmondásos kijelentéshez vezet.

Az ilyen jellegű ellentmondások kiküszöbölésére vezették be a disztribúció elméletet.

Dirac δ függvényének jelentős szerepe van a kvantum mechanikában.

2. Analízis a GNS-en

1. Értelmezés. *(Wang, [3]) Egy általánosított x szám egy függvény $\mathbb{Z}$-ből $\mathbb{R}$-be, ú.h. létezik $k = k(x) \in \mathbb{Z}$, amit az x szint indexének nevezünk, a következő tulajdonsággal:*

$$x(t) = 0, \forall t < k(x), \qquad x(k(x)) \neq 0$$

Ekkor az x formális hatványsorba fejthető:

$$x = \sum_{t \geq k(x)} x(t)\boldsymbol{1}_{(t)}$$

$$\equiv (\ldots, 0, x(k(x)), x(k(x)+1), \ldots)$$

$$\equiv (\ldots, 0, x_{(k(x))}, x_{(k(x)+1)}, \ldots)$$

ahol a fenti írásmódokban az első nem 0 elem a $k(x)$-edik szinten van. $\boldsymbol{1}_{(t)}$ az a $\mathbb{Z}$-ből $\mathbb{R}$-beli függvény, amelyre $\boldsymbol{1}_{(t)}(s) = 0, \forall s \neq t \quad \boldsymbol{1}_{(t)}(t) = 1$, $x(t) \equiv x_t$ és $\boldsymbol{0}$-val a nullfüggvényt jelöjük. Az összes általánosított számok halmazát ***GNS****-el jelöljük (generalized number system).*

A félreértések elkerülése végett a továbbiakban a **GNS**-beli számokat vastagítottan, míg a valós számokat normálisan írjuk.

Most értelmezhetünk műveleteket az így megkonstruált halmazon.

2. Értelmezés. *(Wang, [3])*

1. *Összeadás és kivonás:*

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{GNS} \Longrightarrow \boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{y} = \sum_{t \in \mathbb{Z}} [\boldsymbol{x}(t) \pm \boldsymbol{y}(t)]\boldsymbol{1}_t$$

2. *Rendezési reláció:*

$$\boldsymbol{x} < \boldsymbol{y} \Longleftrightarrow \exists k_0 \in \mathbb{Z} : \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{y}(t), t < k_0, \qquad \boldsymbol{x}(k_0) < \boldsymbol{y}(k_0)$$

   *A fennt értelmezett rendezési relációt követően gondolhatunk a **GNS**-re, mint különköző szintekkel rendelkező számok rendszerére. Ilyen értelemben az $\boldsymbol{1}_t$ függvényt a t-edik szint „egységelemének" tekinthetjük.*

3. *Skalárral való szorzás:*

$$\textit{Legyenek} \quad c \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{GNS} \Longrightarrow c\boldsymbol{x} = \sum_t c\boldsymbol{x}(t)\,\boldsymbol{1}_t$$

4. *Szorzás:*

$$\textit{Legyenek} \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{GNS} \Longrightarrow \boldsymbol{xy} = \sum_t \sum_{n+m=t} [\boldsymbol{x}(m)\boldsymbol{y}(n)]\,\boldsymbol{1}_t$$

   Sajátosan $\boldsymbol{1}_t\boldsymbol{1}_s = \boldsymbol{1}_{t+s}$.

5. *Osztás:*

$$\textit{Legyenek} \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{GNS} \Longrightarrow \textit{ha} \quad \exists \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{GNS} : \quad \boldsymbol{yz} = \boldsymbol{x}$$

   ekkor a $\boldsymbol{z}$ *általánosított számot az* $\boldsymbol{x}$ *és* $\boldsymbol{y}$ *osztási hányadosának nevezzük és* $\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}$*-al jelöljük.*

1. Tétel. *(Wang, [3]) Ha* $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0} \equiv \sum_t \boldsymbol{0}\boldsymbol{1}_t$, *akkor az* $\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}$ *hányados mindig egyértelműen létezik.*

2. Tétel. *(Wang, [3]) Bármely* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{GNS}$, *melyre* $\boldsymbol{x}(k(\boldsymbol{x})) \geq 0$ *és* $k(\boldsymbol{x})$ *páros, egyértelműen létezik* $\boldsymbol{y}^2 = \boldsymbol{yy} = \boldsymbol{x}$. *Ezt az általálosított* $\boldsymbol{y}$*-t az* $\boldsymbol{x}$ *négyzetgyökének nevezzük, és* $\sqrt{\boldsymbol{x}}$*-el jelöljük.*

3. Tétel. *(Wang, [3]) Bármely* $n \geq 2$ *természetes számra és bármely olyan* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{GNS}$*-re, melyre* $k(\boldsymbol{x})$ *többszöröse* n*-nek,*

1. *Ha* n *páros es* $\boldsymbol{x}(k(\boldsymbol{x})) \geq 0$, *akkor egyértelműen létezik* $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{GNS}$ *úgy, hogy*

$$\boldsymbol{y}^n \equiv \underbrace{\boldsymbol{yy}\ldots\boldsymbol{y}}_{n-szer} = \boldsymbol{x}$$

2. *Ha* n *páratlan, akkor egyértelműen létezik* $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{GNS}$ *úgy, hogy* $\boldsymbol{y}^n = \boldsymbol{x}$.

Az 1) és 2)-ben értelmezett általánosított $\boldsymbol{y}$-t az $\boldsymbol{x}$ n-edrendű gyökének nevezzük, és $\sqrt[n]{\boldsymbol{x}}$ – el vagy $\boldsymbol{x}^{\frac{1}{n}}$-el jelöljük.

Az fennti konstrukciók alapján kijelenthetünk egy nagyon fontos tételt:

4. Tétel. *(Wang, [3]) $(\boldsymbol{GNS}, +, \cdot, <)$ egy rendezett nem-Arkhimédészi testet alkot.*

1. Megjegyzés. *A fenntebb kijelentett tételek bizonyítása az értelmezések alapján történik és ezek elementáris bizonyítások. Részletek megtalálhatóak [3]-ban. A továbbiakban is csak azon bizonyításokat adjuk meg, amelyek nem azonnaliak, esetleg másképp történnek, mint [3]-ban.*

3. Értelmezés. *(Wang, [3]) Ha $\boldsymbol{I}_k = \{\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{1}_k : x \in \mathbb{R}\}$ és k és h olyan egész számok, amelyek teljesítik $k > h$-t, akkor az $\boldsymbol{I}_h$-beli általánosított számok „elenyészők”, az $\boldsymbol{I}_k$-beliekhez viszonyítva; fordítva, nemnulla általánosított számok $\boldsymbol{I}_k$-ban „végtelenek” az $\boldsymbol{I}_h$-beliekhez viszonyítva.*

5. Tétel. *(Wang, [3]) Legyenek $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{GNS}: \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{y}$. Ekkor*

1. $k(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \geq \min\{k(\boldsymbol{x}), k(\boldsymbol{y})\}$
2. $k(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}) = k(\boldsymbol{x}) + k(\boldsymbol{y})$
3. $k\left(\dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right) = k(\boldsymbol{x}) - k(\boldsymbol{y})$

2.1. Folytonosság

4. Értelmezés. *(Wang, [3]) Legyen $E \subset \boldsymbol{GNS}$ és $\boldsymbol{f} : E \longrightarrow \boldsymbol{GNS}$ függvény. Legyenek $\boldsymbol{x}_0 \in E$ és $m, n \in \mathbb{Z}$. Ha $\forall \varepsilon > 0$ valós számra $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy $\forall \boldsymbol{x} \in E$*

$$k(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = m \quad |(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)_m| < \delta$$

maga után vonja, hogy

$$k(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)) \geq n \quad |(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))_n| < \varepsilon$$

akkor azt mondjuk, hogy $\boldsymbol{f}$ „látszólagos-(m,n) folytonos” $\boldsymbol{x}_0$-ban.

6. Tétel. *(Wang, [3]) Ha $\boldsymbol{f}$ és $\boldsymbol{g}$ látszólagos-(m,n) folytonosak az $\boldsymbol{x}_0$ pontban, akkor $\boldsymbol{f}$+$\boldsymbol{g}$, illetve $\boldsymbol{f}$-$\boldsymbol{g}$ függvények is látszólagos-(m,n) folytonosak az $\boldsymbol{x}_0$-ban.*

7. Tétel. *(Wang, [3]) Legyenek $\boldsymbol{f}$ és $\boldsymbol{g}$ függvények látszólagos-(m, n_1), illetve látszólagos-(m, n_2) folyonosak az $\boldsymbol{x}_0$-ban. Ekkor:*

1. $\boldsymbol{fg}$ *látszólagos-(m,n) folytonos az* $\boldsymbol{x}_0$*-ban, ahol* $n = \min\{k(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)) + n_2, n_1 + k(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0))\}$

2. *ha* $n_2 = k(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0))$ *és* $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0) \neq \boldsymbol{0}$, *akkor* $\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}$ *látszólagos-(m,n) folyonos* $\boldsymbol{x}_0$*-ban, ahol* $n = \min\{n_1 - n_2, k(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)) - n_2\}$.

2.2. Differenciálszámítás

5. Értelmezés. *(Wang, [3]) Legyen* $S \in \mathbb{R}$ *úgy, hogy* $m, n \in \mathbb{Z}$*-re,* $\forall \varepsilon > 0$ *valós számra* $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *úgy, hogy*

$$k(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = m \quad |(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)_m| < \delta$$

maga után vonja, hogy

$$k(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)) \geq n$$

és

$$\left| \frac{(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))_n}{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)_m} - S \right| < \varepsilon$$

Ekkor az $S\boldsymbol{1}_{n-m}$ *általánosított számot az* $\boldsymbol{f}$ *(m,n)-deriváltjának nevezzük az* $\boldsymbol{x}_0$*-ban*

Ebben az esetben $\boldsymbol{f}$ *(m,n)-differenxiálható* $\boldsymbol{x}_0$*-ban és a deriváltat a következő képpen jelöljük:*

$$\boldsymbol{f}'_{(m,n)}(\boldsymbol{x}_0) = \frac{\mathrm{d}_n \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)}{\mathrm{d}_m \boldsymbol{x}} = \lim_{(m,n)\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)}{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0} = S\boldsymbol{1}_{n-m}$$

Nyilvánvaló, hogy a (0,0)-deriváltja az $\boldsymbol{f}$*-nek a közönséges valós függvény deriváltja.*

Kijelenthetünk egy nagyon fontos tételt.

8. Tétel. *(Wang, [3]) Ha* $\boldsymbol{f} : \mathbf{GNS} \longrightarrow \mathbf{GNS}$ *(m,n)-differenciálható az* $\boldsymbol{x}_0$ *pontban, akkor látszólagos-(m,n) folytonos is ebben a pontban.*

Bizonyítás:

Ahhoz, hogy bebizonyítsuk, hogy $\boldsymbol{f}$ *látszolagos-(m,n) folytonos az adott pontban igazolni kell, hogy* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *úgy, hogy ha*

$$k(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = m \quad |(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)_m| < \delta$$

$$\Longrightarrow \quad k(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)) \geq n, \quad |(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))_n| < \varepsilon$$

$\boldsymbol{f}$ *(m,n)-diff.* $\boldsymbol{x}_0 \Longrightarrow \exists S \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{GNS}$

$$\Longrightarrow k(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = m, \quad |(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)_m| < \delta \leq \min\left\{\frac{\varepsilon}{2(|S|+1)}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

$$\Longrightarrow |k(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))| \geq n, \qquad \left|\frac{(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))_n}{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)_m} - S\right| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))_n}{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)_m}\right| - |S| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow |(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))_n| < (\varepsilon+|S|)|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)_m| = \varepsilon|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)_m| + |S||(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)_m|$$

$$< \frac{\varepsilon^2}{2} + |S|\frac{\varepsilon}{2(|S|+1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Tehát a kért kijelentés igazolva van. Még csak egy annyi észrevételünk van, hogy a bizonyításban felhasználtuk, hogy az epszilon szám annyira kicsi, hogy kisebb, mint 1. De ezzel nem sértettük meg az általánosságot.

■

9. Tétel. *(Wang, [3])*

1. *Ha* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{GNS} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{GNS} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}_n \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}_m \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{GNS}$
2. *Ha* $s > 0 \in \mathbf{N}$ *és* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^s$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{d}_n \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}_m \boldsymbol{x}} = s\boldsymbol{x}_m^{s-1}$$

ahol m=k($\boldsymbol{x}$*) és n=sm.*

10. Tétel. *(Wang, [3]) Legyen* $c \in \mathbf{R}$ *konstans és léteznek* $\boldsymbol{f}'_{(m,n)}(\boldsymbol{x})$ *és* $\boldsymbol{g}'_{(m,n)}(\boldsymbol{x})$. *Ekkor*

1. $(c\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))'_{(m,n)} = c\boldsymbol{f}'_{(m,n)}(\boldsymbol{x})$.
2. $(\boldsymbol{f} \pm \boldsymbol{g})'_{(m,n)}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}'_{(m,n)}(\boldsymbol{x}) \pm \boldsymbol{g}'_{(m,n)}(\boldsymbol{x})$.

1. Példa. *Legyen* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *végtelenszer differenciálható valós változójú, valós függvény úgy, hogy* $\{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$ *korlátos és* $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\mathrm{d}t = 1$. *Legyen*

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} g(x_1)\boldsymbol{1}_{-1}, & \text{ha } \boldsymbol{x} = (\ldots, 0, x_1, x_2, \ldots) \\ \boldsymbol{0}, & \text{máskülönben} \end{cases}$$

Ebben az esetben az illető $\boldsymbol{x}$ *szintje 1.*
Könnyen belátható, hogy a $\boldsymbol{g} : \boldsymbol{GNS} \longrightarrow \boldsymbol{GNS}$ *(1,-1)-deriváltja*

$$\frac{\mathrm{d}_{-1}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})}{\mathrm{d}_1 \boldsymbol{x}} = \begin{cases} g'(x_1)\boldsymbol{1}_{-2}, & \text{ha } \boldsymbol{x} = (\ldots, 0, x_1, x_2, \ldots) \\ \boldsymbol{0}, & \text{máskülönben} \end{cases}$$

2. Megjegyzés. *Könnyen belátható, hogy az (m,n)-differenciálhatóság nehézségeket jelent a szorzat, illetve hányados (m,n)-differenciálhatóság megfogalmazásában, akárcsak a látszólagos-(m,n) folytonosság esetében, mint láttuk. Ezért és más meggondolásokból értelmezzük egy kissé másképp a **GNS**-en értelmezett függvények differenciálját, ami lényegében ugymond általánosított fogalma lesz az (m,n)-differenciálnak.*

6. Értelmezés. *(Wang, [3]) Értekmezzük az $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{GNS}$ abszolút értékét:*

$$|\boldsymbol{x}| = \max\{\boldsymbol{x}, -\boldsymbol{x}\}$$

7. Értelmezés. *(Wang, [3]) Legyen $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (\ldots, y_{-m}, \ldots, y_0, \ldots, y_n, \ldots)$ egy **GNS**-ből **GNS**-beli függvény. Ekkor minden konstans $k \in \mathbb{Z}$-re, y_k függvénye az $\boldsymbol{x}$-nek. Akár valós analízis esetében legyenek $\Delta\boldsymbol{x}$ és $\Delta\boldsymbol{y}$ az $\boldsymbol{x}$, illetve $\boldsymbol{y}$ növekményei úgy, hogy*

$$\Delta\boldsymbol{x} = (\ldots, (\Delta\boldsymbol{x})_i, \ldots), \quad \Delta\boldsymbol{y} = (\ldots, (\Delta\boldsymbol{y})_i, \ldots)$$

ahol $(\Delta\boldsymbol{y})_i = (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))_i$, minden $i \in \mathbb{Z}$-re.

Legyen $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{GNS}$ és legyen most $\Delta\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0 + \Delta\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$.

Ha létezik egy $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)$-val jelölt általánosított szám úgy, hogy minden $\epsilon > \boldsymbol{0}$ általánosított számra létezik $\delta = \delta(\epsilon) > \boldsymbol{0}$ általánosított szám, $\forall \Delta\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{GNS}$, ami teljesíti a $|\Delta\boldsymbol{x}| < \delta$,

$$\left|\frac{\Delta\boldsymbol{y}}{\Delta\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)\right| < \epsilon$$

*Ilyen értelemben az $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)$ általánosított számot az $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ **GNS**-deriváltjának (vagy egyszerűen deriváltjának) nevezzük az $\boldsymbol{x}_0$ pontban.*

A következő jelölésmódot használjuk a deriváltra:

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{\Delta\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}} \frac{\Delta\boldsymbol{y}}{\Delta\boldsymbol{x}} = \lim_{\Delta\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0 + \Delta\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)}{\Delta\boldsymbol{x}}$$

3. Megjegyzés. *Ilyen értelemben a határérték fogalma is átértelmeződik egy kicsit. Hasonló az értelmezésmód a valós n-dimenziós analízisbeli értelmezéshez.*

4. Megjegyzés. *A derivált ilyenszerű értelmezése lényegében erős értelmezés, érzékelteti azt a tényt, hogy általánosított számokon értelmezett függvény deriváltja általánosított szám.*

Ez a tény ötletet adhat a folytonosság fogalmának az átértelmezésére is, mert formailag, de értelmileg is sokkal jobban érzékelhetővé teszi a fogalmakat.

8. Értelmezés. *(Mészáros Alpár Richárd) Legyen $E \subset$ **GNS** és $\boldsymbol{f} : E \longrightarrow$ **GNS** függvény. Legyen $\boldsymbol{x_0} \in E$. Ha $\forall \epsilon > \boldsymbol{0}$ általánosított számra $\exists \delta = \delta(\epsilon) > \boldsymbol{0}$ általánosított szám úgy, hogy $\forall \boldsymbol{x} \in E$ esetén $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}| < \delta$ maga után vonja, hogy $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})| < \epsilon$, akkor azt mondjuk, hogy $\boldsymbol{f}$ **GNS**-folytonos(vagy egyszerűen csak folytonos) az $\boldsymbol{x_0}$ pontban.*

2.3. Integrálszámítás GNS-en

A **GNS**-en való integrálszámítást a hagyományos Lebesgue-integrál segítségével tudjuk bevezetni.

Legyen $\boldsymbol{f}$: **GNS** $\longrightarrow$ **GNS** és legyen $E = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{GNS} : \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| \neq \mathbf{0}\}$.

Első eset: Tegyük fel, hogy $\forall \boldsymbol{x} \in E, x_{-m} = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}$ és $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (\ldots, y_{-m}, \ldots, y_0, \ldots, y_n, \ldots)$, ahol általában $y_k = y_k(\boldsymbol{x})$ függvénye $x_m, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Első lépés: Legyen $H^{(0)} \subseteq \mathbb{R}$, amely teljesíti: $a_0 \in H^{(0)} \iff y_{-m} = 0, ha \quad m > 0$ és $y_0 = y_0(a_0)$ függvénye a_0-nak, ahol $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (\ldots, y_{-m}, \ldots, y_0, \ldots, y_n, \ldots)$, ha $\boldsymbol{x} = (\ldots, 0, a_0, x_1, x_2, \ldots)$ és $\boldsymbol{x}(k(\boldsymbol{x})) = a_0$. Ekkor legyen

$$f^{(0)}(a_0) = \begin{cases} y_0(a_0), & \text{ha } a_0 \in H^{(0)} \\ \infty, & \text{máskülönben} \end{cases}$$

Ha a valós értékű $f^{(0)}$ függvény Lebesgue-integrálható $\mathbb{R}$-en, akkor $\mathbb{R} \backslash H^{(0)}$ Lebesgue-mértéke 0 és $\int_{\mathbb{R}} f^{(0)}(x_0) \mathrm{d}x_0 = a^{(0)}$.

n-edik lépés: Ilyen értelemben megkonstruáltuk az összes $a^{(0)}, a^{(1)}, \ldots, a^{(n-1)}$ számokat.

Minden $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ megszerkesztjük a $H^{(n)} \subseteq \mathbb{R}$ halmazokat úgy, hogy $a_n \in H^{(n)} \iff y_{-m} = 0, ha \quad m > 0$ és $y_{-n} = y_{-n}(a_n)$ függvénye a_n-nek, ahol $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (\ldots, y_{-m}, \ldots, y_0, \ldots, y_n, \ldots)$, ha $\boldsymbol{x} = (\ldots, 0, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, a_n, x_{n+1}, \ldots)$. Ekkor legyen

$$f^{(n)}_{(x_0,\ldots,x_{n-1})}(a_n) = \begin{cases} y_{-n}(a_n), & \text{ha } a_n \in H^{(n)} \\ \infty, & \text{máskülönben} \end{cases}$$

Ha a valós értékű $f^{(n)}_{(x_0,\ldots,x_{n-1})}$ függvény Lebesgue-integrálható $\mathbb{R}$-en, jelöljük az integrált $a^{(n)}(x_0, \ldots, x_{n-1})$-el. Ha a $\sum_{x_0,\ldots,x_{n-1}} a^{(n)}(x_0, \ldots, x_{n-1})$ értelmes, ami azt jelenti, hogy megszámlálható sok 0 tag van és az összeg abszolút konvergens, akkor jelöljük ezt az összeget $a^{(n)}$-el.

9. Értelmezés. *(Wang, (1985)) Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a^{(n)}$ konvergens és egyenlő a-val, akkor az $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ függvényről azt mondjuk, hogy GNL-integrálható, és*

$$(GNL) \int_{\boldsymbol{GNS}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = a$$

Második eset:

A fenntebb megadott E halmazt particionáljuk a következő képpen: $E = \bigcup\{E_k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, ahol $E_k = \{\boldsymbol{x} \in E : k(\boldsymbol{x}) = -k\}$. Minden rögzített $k \in \mathbb{N}$-re képezzük a jobb-eltolását az E_k-nak: $E_k^* = \{\boldsymbol{x}{=}\boldsymbol{x}^*\mathbf{1}_k : \boldsymbol{x}^* \in E_k\}$ és a bal-eltolását az $\boldsymbol{f(x)}$-nek:

$$\boldsymbol{f}^{(k)}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{f(x}\mathbf{1}_{-k})\mathbf{1}_{-k}, & \text{ha } \mathbf{x} \in E_k^* \\ \mathbf{0}, & \text{máskülönben} \end{cases}$$

Most definiálunk egy új függvényt $\boldsymbol{f}^{(0)} : \mathbf{GNS} \longrightarrow \mathbf{GNS}$,

$$\boldsymbol{f}^{(0)}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{f(x)}, & \text{ha } \boldsymbol{x} \in E_0 \\ \mathbf{0}, & \text{máskülönben} \end{cases}$$

Ha $\boldsymbol{f}^{(0)}$ GNL-integrálható, akkor $(GNL) \int_{\mathbf{GNS}} \boldsymbol{f}^{(0)}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}{=}\boldsymbol{a}_0$.

Most definiáljuk az $E_1^* = E_1\mathbf{1}_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{GNS} : \boldsymbol{x}{=}\boldsymbol{z}\mathbf{1}_1, \boldsymbol{z} \in E_1\}$. De tudjuk, hogy $\forall \boldsymbol{x} \in E_1^* \Longrightarrow k(\boldsymbol{x}) = 0$. Legyen most $\boldsymbol{f}^{(1)} : \mathbf{GNS} \longrightarrow \mathbf{GNS}$,

$$\boldsymbol{f}^{(1)}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{f(x}\mathbf{1}_{-1})\mathbf{1}_{-1}, & \text{ha } \boldsymbol{x} \in E_1^* \\ \mathbf{0}, & \text{máskülönben} \end{cases}$$

Ha $\boldsymbol{f}^{(1)}$ GNL-integrálható, akkor $(GNL) \int_{\mathbf{GNS}} \boldsymbol{f}^{(1)}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathbf{a}_1$. Általában $(GNL) \int_{\mathbf{GNS}} \boldsymbol{f}^{(k)}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathbf{a}_k$, ha $\boldsymbol{f}^{(k)}$ GNL-integrálható.

10. Értelmezés. *(Wang, 1985) Ha $\sum_k \boldsymbol{a}_k$ konvergens, akkor az $\boldsymbol{f}$ függvény GNL-integrálható és*

$$(GNL) \int_{\boldsymbol{GNS}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \sum_k \boldsymbol{a}_k$$

A megadott GNL-integrálok mellé Wang bevezetette egy úgynevezett G-integrál fogalmát, amely lényegében egy partikulárisabb esete a GNL-integrálnak, mert erősebb feltételeket követelünk meg. A G-integrálok felépítése teljesen analóg módon történik, a GNL-integrálhoz hasonlóan, annyit követelünk még meg, hogy azok az y_k valós értékű, valós függvények legyenek Lebesgue-integrálhatóak, de formailag pont úgy szerkesztjük meg az $\boldsymbol{f}^{(n)}$ függvényeket. Részletek megtalálhatóak [3]-ban.

Az $\mathbf{a}_k$-k bevezetése teljesen ugyanolyan, mint a GNL-integrálok esetében. Ekkor ha ezek adottak, helye van a következő értelmezésnek.

11. Értelmezés. *(Wang, (1985)) Ha $\sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{a}_n$ konvergál egy általánosított $\boldsymbol{a}$ számhoz, akkor az $\boldsymbol{f}$ G-integrálható és*

$$(G) \int_{\boldsymbol{GNS}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$$

Megfogalmazható a következő tétel, amely kapcsolatot teremt a GNL- illetve G-integrálok között:

11. Tétel. *(Wang, [3]) Ha* $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{GNS} \longrightarrow \boldsymbol{GNS}$ *GNL-integrálható, akkor G-integrálható és*

$$(G) \int_{\boldsymbol{GNS}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = (GNL) \int_{\boldsymbol{GNS}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

5. Megjegyzés. *A fennti értelmezés és tétel alapján látható, hogy a GNL-integrálhatóság jóval általánosabb fogalom, mint a G-integrálhatóság, ezért is nem részleteztük a G-integrál precizebb bevezetését, és ami megtalálható [3]-ban.*

Wang tanulmámnyozta a határozatlan integrál fogalmát is [3]-ban. Ezt az értelmezést adjuk most meg.

12. Értelmezés. *(Wang, [3]) Legyen* $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{GNS} \longrightarrow \boldsymbol{GNS}$. *Tételezzük fel, hogy létezik* $(GNL) \int_{\boldsymbol{GNS}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ *és* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ *függvényérték csak az* $x_{k(\boldsymbol{x})}$ *valós változótól függ. Ekkor az* $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ *határozatlan integrálja a következő képpen adható meg:*

$$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) \mathrm{d}\boldsymbol{z} = \begin{cases} (GNL) \int_{\boldsymbol{GNS}} \tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{z}) \mathrm{d}\boldsymbol{z} + & \\ + \sum_{i=1}^{\infty} (\boldsymbol{f}(x_{k(\boldsymbol{x})}) x_{k(\boldsymbol{x})+i}) \boldsymbol{1}_{k(\boldsymbol{x})+1}, & \textit{ha } \boldsymbol{x} = (\ldots, 0, x_{k(\boldsymbol{x})}, x_{k(\boldsymbol{x})+1}, \ldots) \\ (GNL) \int_{\boldsymbol{GNS}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}) \mathrm{d}\boldsymbol{z}, & \textit{ha } \boldsymbol{x}\textit{-re, } x_{k(\boldsymbol{x})-1} > 0 \\ 0, & \textit{máskülönben} \end{cases}$$

ahol $\boldsymbol{a} = (\ldots, a_{-m}, \ldots, a_0, \ldots, a_n, \ldots)$ *rögzített és* $\tilde{\boldsymbol{f}}: \boldsymbol{GNS} \longrightarrow \boldsymbol{GNS}$ *és*

$$\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{z}) = \begin{cases} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}), & \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0}, & \textit{máskülönben} \end{cases}$$

2.4. Alkalmazások

Az eddig bevezetett alapismeretek alapján bemutatunk néhány alkalmazást, ezekkel is azt bizonyítva, hogy nagy gyakorlati jelentőséggel bír a **GNS** számtest.

Visszatérünk a két említett klasszikus hipotézisre és megvizsgáljuk **GNS** számtestbeli megközelítéssel.

1. Alkalmazás. *(A foton nyugalmi tömege) A dolgozat elején bemutattunk két hipotézist a modern fizikában és ezek ellentmondásosságát. Ezen ellentmondásokat szeretnénk kiküszöbölni* ***GNS*** *reprezentánsokat alkalmazva.*

Legyenek $\boldsymbol{m}_0$*,* $\boldsymbol{m}$*,* $\boldsymbol{v}$ *és* $\boldsymbol{c}$ *általánosított számok, a következő képpen:*

$$\boldsymbol{m}_0 = (\ldots, 0, m_1, \ldots), k(\boldsymbol{m}_0) = 1$$

$$\boldsymbol{m} = (\ldots, 0, m, 0, \ldots), k(\boldsymbol{m}) = 0$$

$$\boldsymbol{v} = (\ldots, 0, c, 0, v_2, v_3, \ldots), k(\boldsymbol{v}) = 0$$

ahol $\mathrm{v}_2 < 0$ *és* c *az Einstein által bevezetett sebesség.*

$\boldsymbol{c}$*-t* $\boldsymbol{m}$*-hez hasonlóan értelmezzük,* $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{m} \in \boldsymbol{I}_0$*.*

Ebben az esetben az Einstein által megadott képlet a következő formát ölti:

$$\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{m}_0}{\sqrt{\boldsymbol{1}_0 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{c}^2}}}$$

A műveletek nyilván a ***GNS****-en értelmezett műveletek. Behelyettesítve az értékeket és elvégezve a műveleteket a következőkhöz jutunk:*

$$\boldsymbol{v}^2 = \sum_{t \geq 0} \sum_{i+j=t} \boldsymbol{v}(i)\boldsymbol{v}(j)\,\boldsymbol{1}_t = (\ldots, c^2, 0, 2cv_2, 2cv_3, \ldots), k(\boldsymbol{v}) = 0$$

$$\frac{\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{c}^2} = (\ldots, 0, 1, 0, 2v_2/c, \ldots), k\Big(\frac{\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{c}^2}\Big) = 0$$

$$\Longrightarrow k\Big(\boldsymbol{1}_0 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{c}^2}\Big) = 2$$

$$\Longrightarrow \frac{\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{c}^2}\Big(k\Big(\boldsymbol{1}_0 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{c}^2}\Big)\Big) = -2v_2/c$$

Ilyen formában a ***GNS****-en értelmezett gyökvonás tételének következtében a* $\sqrt{\boldsymbol{1}_0 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{\boldsymbol{c}^2}}$ *mindig létezik és ennek a számnak a második szinteni komponense mindig pozitív a feltétel alapján, tehát ebben az értelemben nincs ellentmondás. Ez nagyon érdekes, hogy ezen általánosított számok esetében más szinteken más jelenségek játszódnak le.*

2. Alkalmazás. *(Egy új formája a Dirac-féle* δ *függvénynek) A* ***GNS****-en értelmezett integrálszámítás segítségével egy új reprezentációt adhatunk a Dirac-féle* δ *függvénynek és a felmerült ellentmondást is kiküszöbölhetjük ez által.*

Legyen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *végtelenszer differenciálható függvény. Értelmezzük az* f *által indukált függvényt* ***GNS****-en.*

$\boldsymbol{f} \colon \boldsymbol{GNS} \longrightarrow \boldsymbol{GNS}$*,*

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\Big(\sum_{m=1}^{\infty} x_m \boldsymbol{1}_m\Big)^n$$

Igazolható, hogy az így definiált $\boldsymbol{f}$ *függvény GNL-integrálható.*

12. Tétel. *(Wang, (1985)) Legyen* $\boldsymbol{f}$ *a fennt definiált függvény. Ekkor létezik egy* $\boldsymbol{g} : \boldsymbol{GNS} \longrightarrow \boldsymbol{GNS}$ *GNL-integrálható függvény úgy, hogy*

$$\int_{\boldsymbol{GNS}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})$$

Partikulárisan legyen $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *egy korlátos végtelenszer differenciálható függvény úgy, hogy supp(g(x)) korlátos* $\mathbb{R}$*-en és* $\int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{d}x = 1$*. Ekkor megadhatjuk* ***GNS****-bôl* ***GNS****-beli* $\boldsymbol{g}$ *függvény értelmezését.*

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} g(x_1)\boldsymbol{1}_{-1}, & \textit{ha } \boldsymbol{x} = (\ldots, 0, x_1, x_2, \ldots) \\ \boldsymbol{0}, & \textit{máskülönben} \end{cases}$$

Az így értelmezett $\boldsymbol{g}$ *függvény teljesíteni fogja a fentebbi integrál összefüggést és megfeleltethető Dirac* δ *függvényének* ***GNS****-en.*

Bizonyítás:

Legyenek g és $\mathbf{g}$ a tételben értelmezett függvények. Ekkor

$$\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} f^{(n)}(0) g(x_1) \Big(\sum_{m=1}^{\infty} x_m \mathbf{1}_m \Big)^n \right) \mathbf{1}_{-1}, & \text{ha } \mathbf{x} = (\ldots, 0, x_1, x_2, \ldots) \\ \mathbf{0}, & \text{máskülönben} \end{cases}$$

Nyilván $(\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x}))_{-n} = 0, \forall n = 0, 1, \ldots$ és $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\mathrm{d}t = 1$

$$\Longrightarrow \int_{\mathbf{GNS}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{0}) \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\mathrm{d}t = \mathbf{f}(\mathbf{0})$$

Ezzel a bizonyítás teljes.

■

3. Hatványsorok GNS-en

Ahhoz, hogy hatványsorokat tudjuk értelmezni, egy pár alapvető fogalom bevezetésére van szükség.

3.1. Sorozatok, sorok GNS-en

13. Értelmezés. *([4]) Legyen* $r \in \mathbb{R}$ *adott. Értelmezzük a következő félnormát:*

$$||\cdot||_r : \boldsymbol{GNS} \longrightarrow \mathbb{R} \quad ||\boldsymbol{x}||_r = \sup\{|\boldsymbol{x}(k)| : k \leq r\}$$

6. Megjegyzés. *A fent értelmezett félnorma rendelkezik a félnorma tulajdonságaival, amelyek hasonlóak a norma tulajdonságaihoz, ez azonnali ezért ezt most nem részletezzük.*

14. Értelmezés. *(Regularitás), [4] Egy* $\boldsymbol{GNS}$*-beli* $(\boldsymbol{s}_n)$ *sorozat akkor és csak akkor reguláris, ha* $\exists K \in \mathbb{Z}$ *egész konstans úgy, hogy* $\forall n \in \mathbb{N} : k(\boldsymbol{s}_n) \geq K$*.*

15. Értelmezés. *(Erős konvergencia), [4] Legyen* $(\boldsymbol{s}_n)$ *egy* $\boldsymbol{GNS}$*-beli sorozat. A sorozat akkor és csak akkor konvergál erősen egy* $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{GNS}$ *számhoz, ha* $\forall \epsilon \in \boldsymbol{GNS}, \quad \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$ *úgy, hogy* $|\boldsymbol{s}_n - \boldsymbol{s}| < \epsilon \quad \forall n \geq N$*.*

7. Megjegyzés. *A továbbiakban az* $\boldsymbol{x}$ *általánosított szám i-edik szinten levő elemét* $\boldsymbol{x}(i)$*-vel jelöljük,* $\boldsymbol{x}_i$*-vel az* $(\boldsymbol{x}_n)$ *általánosított számsorozat i-edik tagját, a félreértések elkerülése végett.*

16. Értelmezés. *(Gyenge konvergencia), [4] Egy* $(\boldsymbol{s}_n)$ $\boldsymbol{GNS}$*-beli sorozat akkor és csak akkor konvergál gyengén* $\boldsymbol{GNS}$*-ben, ha* $\exists \boldsymbol{s} \in \boldsymbol{GNS}$ *úgy, hogy* $\forall \varepsilon > 0$ *valós számra* $\exists N \in \mathbb{N}$*:*

$$||\boldsymbol{s}_m - \boldsymbol{s}||_{1/\varepsilon} < \varepsilon, \quad \forall m \geq N$$

8. Megjegyzés. *Mint minden metrikus térben,* $\boldsymbol{GNS}$*-ben is a sorozatok határértéke egyértelmű. Itt is beszélhetük Cauchy-sorozatról, sőt gyenge Cauchy-sorozatról és metrikus terekhez hasonlóan használhatunk fogalmakat. Ezen fogalmak bevezetését és tisztázását mellőzzük; ezek analóg megfogalmazása megtalálható [4]-ben.*

9. Megjegyzés. *Elmondható, hogy már a* $\boldsymbol{GNS}$*-beli számok értelmezésében használtuk a formális hatványsor fogalmát.*

Bevezethetjük, a Levi-Civita testen értelmezett sorok mintájára a **GNS**-en értelmezett sorokat és hatványsorokat[4][5].

3.2. Hatványsorok

13. Tétel. *(Erős konvergencia hatványsorokra, [4]) Legyen* $(\boldsymbol{a}_n)$ *egy* $\boldsymbol{GNS}$*-beli sorozat és legyen*

$$k_0 = -\liminf_{n\to\infty} \frac{k(\boldsymbol{a}_n)}{n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{-k(\boldsymbol{a}_n)}{n} \in \mathbb{R}$$

Legyenek továbbá $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{GNS}$ *rögzített és* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{GNS}$ *adott. Ekkor a* $\sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{a}_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^n$ *hatványsor erősen konvergál* $\boldsymbol{GNS}$*-ben, ha* $k(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) > k_0$*, máskülönben ha* $k(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) < k_0$ *vagy* $k(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) = k_0$ *és* $\frac{-k(\boldsymbol{a}_n)}{n} > k_0$ *végtelen sok n-re, akkor a hatvánsor erősen divergál.*

10. Megjegyzés. *Míg a hatványsorok erős konvergenciája úgymond „öröklődik” a Levi-Civita számtesttől, addig a gyenge konvergenciánál plusz feltételeket kell megadni, nem vehető át abban a formában.*

Annak érdekében, hogy transzcendes függvényeket, mint például szinusz, koszinusz, exponenciális függvény, stb. tudjunk értelmezni ***GNS****-en, illetve, hogy be tudjuk vezetni az analitikus függvény fogalmát, szükségünk van a gyenge konvergencia megadására, vagy másik lehetőségünk az, hogy az erős konvergencia segítségével értelmezzük mindezeket, függetlenül a [4]-beli értelmezésektől.*

11. Megjegyzés. *Az előző megjegyzésünk valóban helyénvaló és nagyon könnyen belátható, hogy transzcendens függvényeket nem tudunk megadni a hatványsorok erős konvergenciája segítségével, mert mint ahogy majd látni fogjuk ezen függvények lényegében valós együtthatójú hatványsorok lesznek, ezekre viszont nem lesz alkalmazható az erős konvergencia tétel.*

14. Tétel. *(Gyenge konvergencia hatványsorokra)(Mészáros Alpár Richárd) Legyen* $(\boldsymbol{a}_n)$ *egy* ***GNS****-beli sorozat és legyen*

$$k_0 = -\Big[\liminf_{n\to\infty} \frac{k(\boldsymbol{a}_n)}{n}\Big] = \Big[\limsup_{n\to\infty} \frac{-k(\boldsymbol{a}_n)}{n}\Big] \in \mathbb{Z}$$

Legyenek továbbá $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{GNS}$ *rögzített és* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{GNS}$ *adott úgy, hogy* $k(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) = k_0$*. Minden* $n \geq 0$ *természetes számra legyen* $\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{a}_n \boldsymbol{1}_{nk_0}$*. Tételezzük fel, hogy a* $(\boldsymbol{b}_n)$ *sorozat reguláris és* $k(\boldsymbol{b}_n) = k_{i(n)}$ *és* $k_{i(n)} < k_{i(m)}$*, ha* $i(n) < i(m)$*,* $i(n), i(m) \in \mathbb{N}$ *indexek,* $k_{i(n)}, k_{i(m)} \in \mathbb{Z}$*. Minden n-re* $\boldsymbol{b}_n = \sum_{j=1}^{\infty} \boldsymbol{b}_n(k_j)\boldsymbol{1}_{k_j}$*. Legyen*

$$r = \frac{1}{\sup\{\limsup_{n\to\infty} |\boldsymbol{b}_n(k_j)|^{1/n} : j \geq 1\}}$$

Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{a}_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^n$ *abszolút gyengén konvergál a* ***GNS****-ben, ha* $|(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)(k_0)| < r$*, ellenkező esetben a hatványsor gyengén divergens.*

Megjegyzés: [x]-el az x valós szám egész részét jelöltük.

Bizonyítás:

Legyen $\mathbf{y} = \mathbf{1}_{-k_0}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$

$$\Longrightarrow k(\mathbf{y}) = 0 = \Big[\limsup_{n\to\infty} \frac{-k(\mathbf{b}_n)}{n}\Big], \qquad \mathbf{a}_n(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^n = \mathbf{b}_n\mathbf{y}^n, \quad \forall n \geq 0$$

Az általánosság megsértése nélkül vehetjük, hogy $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}; k_0 = 0 = k(\mathbf{x})$ és $\mathbf{b}_n = \mathbf{a}_n, \quad \forall n \geq 0$.

Legyen $X = \Re(x)$, ekkor $X \neq 0$. Először vegyük, hogy |X|<r.

Első állítás: Minden $j \geq 1$ igaz, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a}_n(k_j)X^n$ konvergál $\mathbb{R}$-ben.

Az állítás bizonyítása: $|X| < r \Longrightarrow \frac{1}{|X|} > \sup\{\limsup_{n\to\infty} |\mathbf{a}_n(k_j)|^{1/n} : j \geq 1\}$;

$$\Longrightarrow |X| < \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |\mathbf{a}_n(k_j)|^{1/n}}, \quad \forall j \geq 1$$

Innen következik, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a}_n(k_j)X^n$ konvergens $\mathbb{R} - ben \quad \forall j \geq 1$.

Második állítás: Minden $j \geq 1$ esetén a $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a}_n(k_j)\mathbf{x}^n$ konvergens **GNS**-ben.

Az állítás bizonyítása:

Legyen $j \geq 1$ rögzített. Minden n-re, legyen $A_{n_j}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{a}_i(k_j)\mathbf{x}^i$. Tehát azt kell belátni, hogy az $(A_{n_j}(\mathbf{x}))_{n\geq 0}$ gyenge konvergens. Könnyen belátható, hogy igazolni kell, hogy a $(A_{n_j}(\mathbf{x})(t))$ sorozat konvergens **GNS**-ben, minden $t \in \mathbb{Z}$-re.

Legyen $\mathbf{s}$=$\mathbf{x}$-X. Ha $\mathbf{s}$=$\mathbf{0}$, akkor megvagyunk, tehát feltételezzü, hogy $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$. Legyen $t \in \mathbb{Z}$ adott és válasszunk egy $m \in \mathbb{N}$-et úgy, hogy $mk(\mathbf{s}) > t$. Ekkor ha kifejtjük az $(X + \mathbf{s})^n$-t, a t-edik szinten azt kapjuk, hogy:

$$((X + \mathbf{s})^n)(t) = \Big(\sum_{l=0}^{n} \mathbf{s}^l X^{n-l} \frac{n!}{(n-l)!l!}\Big)(t)$$

$$= \sum_{l=0}^{\min\{m,n\}} \mathbf{s}^l(t) X^{n-l} \frac{n!}{(n-l)!l!}$$

Az utolsó összefüggésben azt a tényt használtuk, hogy $\mathbf{s}^l$ úgymond „eltűnik” a t-edik szinten, ha $l > m$. Tehát tovább folytathatjuk, ha $v_2 > v_1 > m$:

$$\sum_{n=v_1}^{v_2} \Big|\mathbf{a}_n(k_j)(X + \mathbf{s})^n(t)\Big| = \sum_{n=v_1}^{v_2} |\mathbf{a}_n(k_j)| \Big| \sum_{l=0}^{\min\{m,n\}} \mathbf{s}^l(t) \frac{n!}{(n-l)!l!} X^{n-l} \Big|$$

$$\leq \sum_{n=v_1}^{v_2} \sum_{l=0}^{m} |\mathbf{a}_n(k_j)||\mathbf{s}^l(t)| \frac{n!}{(n-l)!l!} |X|^{n-l}$$

$$\leq \Big(\sum_{l=0}^{m} \frac{|\mathbf{s}^l(t)||X|^{m-l}}{l!}\Big)\Big(\sum_{n=v_1}^{v_2} |\mathbf{a}_n(k_j)| n^m |X|^{n-m}\Big)$$

A jobb összeg csak tiszta valós tagokat tartalmaz. Ha $|X| < r$, a sor konvergens; az n^m szorzótényező nem befolyásolja a konvergenciát, mert $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^m} = 1$. A bal összeg viszont nem függ a v-től, ezért kapjuk az abszolút konvergenciát t-ben. Ezzel bizonyítottuk az állítást.

Harmadik állítás: $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a}_n \mathbf{x}^n$ gyengén konvergens **GNS**-ben.

Az állítás bizonyítása:

Felhasználjuk a második állításunkat, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a}_n(k_j)\mathbf{x}^n$ konvergens **GNS**-ben, minden $j \geq 1$-re. Minden j-re legyen $f_j(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a}_n(k_j)\mathbf{x}^n$, ekkor $k(f_j(\mathbf{x})) \geq 0 \quad \forall j \geq 1$.

Ekkor a $\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{k_j} f_j(\mathbf{x})$-ben sor gyengén konvergens **GNS**-ben. Most legyen $t \in \mathbb{Z}$ adott. Biztos létezik $m \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $k_j > t \quad \forall j \geq m$. Ekkor

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{k_j} f_j(\mathbf{x})\right)(t) = \sum_{j=1}^{\infty} (\mathbf{1}_{k_j} f_j(\mathbf{x}))(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{t_1+t_2=t} \mathbf{1}_{k_j}(t_1) f_j(\mathbf{x})(t_2) \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{t_1+t_2=t} \mathbf{1}_{k_j} f_j(\mathbf{x})(t_2) \right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{t_1+t_2=t} \mathbf{1}_{k_j}(t_1) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a}_n(k_j)\mathbf{x}^n \right)(t_2)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{t_1+t_2=t} \mathbf{1}_{k_j}(t_1) \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a}_n(k_j)\mathbf{x}^n(t_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} \mathbf{a}_n(k_j) \left(\sum_{t_1+t_2=t} \mathbf{1}_{k_j}(t_1)\mathbf{x}^n(t_2) \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{a}_n(k_j) \left(\sum_{t_1+t_2=t} \mathbf{1}_{k_j}(t_1)\mathbf{x}^n(t_2) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{a}_n(k_j)(\mathbf{1}_{k_j}\mathbf{x}^n)(t)$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{a}_n(k_j) \mathbf{1}_{k_j} \mathbf{x}^n \right)(t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{a}_n(k_j) \mathbf{1}_{k_j} \right) \mathbf{x}^n \right)(t)$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a}_n \mathbf{x}^n \right)(t)$$

Ez igaz $\forall t \in \mathbb{Z}$-re. Tehát a $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a}_n \mathbf{x}^n$ gyengén konvergál a $\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{k_j} f_j(\mathbf{x})$ felé.

Még csak annyit kell megjegyezni a bizonyítás teljességéhez, hogy ha $|X| > r$, akkor ezzel a gondoltamenettel, már az első állításnál ellentmondás következik be, tehát ebben az esetben a hatványsorunk gyengén divergens.

$\blacksquare$

12. Megjegyzés. *Ez a tétel roppant fontos annak érdekében, hogy valós együtthatós **GNS**-beli hatványsorokat tudjunk bevezetni, mert ezek konvergenciáját csak a gyenge konvergencia segítségével tudjuk megadni.*

3.3. Transzcendes függvények

Egyértelmű, hogy a következő valós együtthatós **GNS**-beli hatványsorok abszolút gyengén konvergensek **GNS**-ben minden $\mathbf{x} \in \mathbf{GNS}$, amelyek abszolút értéke legtöbb véges.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{x}^n}{n!}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\mathbf{x}^{2n}}{(2n)!}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\mathbf{x}^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{x}^{2n}}{(2n)!}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{x}^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

17. Értelmezés. *(Transzcendens függvények)*

$$e^{\boldsymbol{x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{x}^n}{n!}$$

$$\cos \boldsymbol{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\boldsymbol{x}^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin \boldsymbol{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\boldsymbol{x}^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh \boldsymbol{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{x}^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sinh \boldsymbol{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{x}^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

13. Megjegyzés. *A fenti transzcendens függvényekre érvényesek a komplex, vagy akár a valós analízisbeli formulák. Például a trigonometrikus függvényekre az összeg, az exponenciálisra a szorzat, stb. Ezek szintén analóg módon megtalálhatóak a[4]-ban.*

3.4. A folytonosság és differenciálhatóság más formái GNS-en

A folytonosságot, illetve differenciálhatóságot megadtuk már egy előző fejezetben. Ezekre szeretnénk most visszatérni és picitt jobb megfogalmazásban bemutatni.

18. Értelmezés. *Legyen* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{GNS}: \quad \boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$. *Ekkor értelmezzük az [**a**,**b**], (**a**,**b**) zárt, illetve nyílt általánosított intervallumokat* ***GNS**-ben:*
$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{GNS} : \boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}, \quad vagy \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}, \quad vagy \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\};$
$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{GNS} : \boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}\}.$

19. Értelmezés. *([4]) Legyen* $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$ *általánosított számok.* $\boldsymbol{f} : [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \longrightarrow \boldsymbol{GNS}$*. Azt mondjuk, hogy* $\boldsymbol{f}$ *akkor és csak akkor folytonos [*$\boldsymbol{a}$*,*$\boldsymbol{b}$*]-n ha* $\exists \boldsymbol{M} \in \boldsymbol{GNS}$ *úgynevezett Lipschitz konstansa az* $\boldsymbol{f}$*-nek a megadott intervallumon úgy, hogy:*

$$\left|\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})}{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}}\right| \leq \boldsymbol{M}, \quad \forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$$

20. Értelmezés. *([4]) Legyenek* $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$ *általánosított számok.* $\boldsymbol{f} : (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \longrightarrow \boldsymbol{GNS}$*. Azt mondjuk, hogy* $\boldsymbol{f}$ *akkor és csak akkor differenciálható a megadott intervallumon, ha létezik egy függvény,* $\boldsymbol{f}' : (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \longrightarrow \boldsymbol{GNS}$*, úgynevezett deriváltja az* $\boldsymbol{f}$*-nek a megadott intervallumon úgy, hogy* $\forall \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *a* $\boldsymbol{F}_{1,\boldsymbol{x}} : (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \longrightarrow \boldsymbol{GNS}$*,[4]*

$$\boldsymbol{F}_{1,\boldsymbol{x}} = \begin{cases} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}}, & \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \end{cases}$$

deriváltfüggvény folytonos legyen a megadott intervallumon.

21. Értelmezés. *([4]) Legyenek* $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$ *általánosított számok.* $\boldsymbol{f} : (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \longrightarrow \boldsymbol{GNS}$*. Legyen* $n \geq 2$ *egész szám. Bevezetjük az* n*-szeres differenciálhatóság fogalmát az* $\boldsymbol{f}$*-nek a megadott intervallumon indukcióval: ha megvan a* $\boldsymbol{f}$*-nek (n-1)-edrendű deriváltja az intervallumon, akkor azt mondjuk, hogy* $\boldsymbol{f}$ *akkor és csak akkor n-szeresen differenciálható a megadott intervallumon, ha az (n-1)-edrendű deriváltfüggvény,* $\boldsymbol{F}_{n-1,\boldsymbol{x}}$ *differenciálható a megadott intervallumon. Ekkor a*

$$\boldsymbol{f}^{(n)}(\boldsymbol{x}) = n!\boldsymbol{F}'_{n-1,\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})$$

számot az $\boldsymbol{f}$ *n-edrendű deriváltjának nevezzük az* $\boldsymbol{x}$*-ben.*

4. GNS-analitikus függvények

22. Értelmezés. *([4]) Legyenek* $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$ *általánosított számok,* $\boldsymbol{f} : [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \longrightarrow \boldsymbol{GNS}$*. Azt mondjuk, hogy az* $\boldsymbol{f}$ *hatványsorba fejthető vagy* $\boldsymbol{GNS}$*-analitikus a megadott intervallumon, ha* $\forall \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ *létezik* $\delta > \boldsymbol{0}$ *általánosított szám és létezik egy* $(\boldsymbol{a}_n(\boldsymbol{x}))$ *reguláris sorozat* $\boldsymbol{GNS}$*-ben úgy, hogy gyenge konvergencia alatt* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{a}_n(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})^n$*, bármely* $\boldsymbol{y} \in (\boldsymbol{x} - \delta, \boldsymbol{x} + \delta) \cap [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$*.*

Egy nagyon fontos tételt jelenthetünk ki.

15. Tétel. *([4]) Legyen* $\boldsymbol{f} : [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \longrightarrow \boldsymbol{GNS}$*,* $\boldsymbol{GNS}$*-analitikus függvény a megadott intervallumon. Ekkor* $\boldsymbol{f}$ *végtelen sokszor differenciálható az [*$\boldsymbol{a}$*,*$\boldsymbol{b}$*]-on.*

Sőt, ha $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{a}_n(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^n$*, akkor a megfelelő együtthatók a következő formában írhatók:*

$$\boldsymbol{a}_i = \frac{\boldsymbol{f}^{(i)}(\boldsymbol{x}_0)}{i!}$$

Bizonyítás:

A bizonyítás azonnali az értelmezések alapján és ötletben hasonlít a valós- vagy komplex analízisbeli bizonyításhoz.

■

14. Megjegyzés. *A fenti tétel következménye a Taylor-féle tétel.*

5. Differenciálegyenletek a GNS számtesten

5.1. Sajátos GNS-analitikus függvények deriváltja

Mivel a **GNS** nem-arkhimédészi testen jól értelmeztük a folytonosságot, differenciálhatóságot, integrálhatóságot és ezek eléggé erős feltételek, van értelme, hogy differenciálegyenleteket értelmezzünk, adjunk meg.

Először is pár alapvető fogalmat tisztázunk az analitikus függvények differenciálhaóságával kapcsolatosan.

A 9., 10. Tételek, általánosításával a 19., 20., 21. Értelmezésekre megfogalmazhatjuk a következő lemmát:

1. Lemma. *(Mészáros Alpár Richárd)*

1. *Ha egy* ***GNS****-ből* ***GNS****-beli függvény konstans, akkor differenciálható(***GNS*** *értelemben). Egy* $\boldsymbol{x}$*-ből* ***GNS****-beli függvény deriváltja* ***GNS****-en akkor és csak akkor* ***0****, ha konstans.*

2. *Legyen* $\boldsymbol{f}\colon \boldsymbol{GNS} \longrightarrow \boldsymbol{GNS}$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^n, \quad n \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = n\boldsymbol{x}^{n-1}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{GNS}$$

Bizonyítás:

A bizonyítás nyilvánvaló az említett tételek általánosításával, illetve a megadott értelmezések alapján.

■

A 15. Tétel alapján minden **GNS**-analitikus függvény végtelen sokszor differenciálható. Megfogalmazható a következő nagyon fontos tétel a fentebb bevezetett transzcendes függvények deriváltjaival kapcsolatosan.

16. Tétel. *(Mészáros Alpár Richárd)*

1. $(e^{\boldsymbol{x}})' = e^{\boldsymbol{x}}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{GNS}$
2. $(\sin \boldsymbol{x})' = \cos \boldsymbol{x}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{GNS}$
3. $(\cos \boldsymbol{x})' = -\sin \boldsymbol{x}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{GNS}$
4. $(\sinh \boldsymbol{x})' = \cosh \boldsymbol{x}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{GNS}$
5. $(\cosh \boldsymbol{x})' = \sinh \boldsymbol{x}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{GNS}$

Bizonyítás:

A bizonyítás minden pont esetében hasonló képpen történik, ezért csak a második pontot igazoljuk, a többi hasonlóan történik.

Mivel $\sin \mathbf{x}$ függvény analitikus **GNS**-en, ezért hatványsorba fejthető, de ezt már megtettük a transzcendes függvények értelmezésében.

$\sin \mathbf{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\mathbf{X}^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Mivel a hatványsor deriválható **GNS**-en, könnyen igazolható, hogy $\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\mathbf{X}^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \frac{\mathbf{X}^{2n}}{(2n+1)!} =$ $= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\mathbf{X}^{2n}}{(2n)!} = \cos \mathbf{x}$.

Ebben a bizonyításban felhasználtuk az előbbi lemmát, ugyanis a hatványsor minden tagja hatványfüggvény és előbbi tétel alapján láttuk, hogy összeg deriváltja a deriváltak összege, így tagonként deriváltunk, majd összegeztük ezeket.

■

5.2. Közönséges differenciálegyenletek GNS-en

Ennyi alapismeret birtokában most már úgymond készen állunk arra, hogy differenciálegyenleteket értelmezzünk, ezek megoldásainak létezését vizsgáljuk.

23. Értelmezés. *Egy olyan egyenletet, amely valamely ismeretlen* $\boldsymbol{GNS}$ *változós* $\boldsymbol{GNS}$*-beli függvényt és annak bizonyos rendű deriváltjait tartalmazza, differenciál egyenletnek nevezünk.*

15. Megjegyzés. *Ez az értelmezés intuitívan hasonlít a valós differenciálegyenletek értelmezéséhez, mégis teljes mértékben más.*

16. Megjegyzés. *A továbbiakban a* $\boldsymbol{GNS}$*-beli függvényeket* $\boldsymbol{y}$*-al, a függvények változóit* $\boldsymbol{x}$*-el fogjuk jelölni, hűek maradván a valósbeli jelölésmódhoz.*

5.3. GNS-analitikus megoldások létezése

A továbbiakban olyan egyenleteket vizsgálunk, amelyeknek megoldásai GNS-analitikus függvények.

2. Példa. *Legyen a következő egyenlet:*

$$\boldsymbol{y'' + y = 0}$$

ahol $\boldsymbol{y}$ ***GNS****-analitikus. Határozzuk meg az általános megoldását!*

Megoldás:

$\mathbf{y} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathbf{x}^n$, mert $\mathbf{y}$ **GNS**-analitikus.

$\Longrightarrow$ $\mathbf{y}" = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n \mathbf{x}^{n-2}$. Helyettesítve n-t (n+2)-vel azt kapjuk, hogy

$\mathbf{y}'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}\mathbf{x}^n$. Ekkor összegezve $\mathbf{y}$-t és $\mathbf{y}''$-t azt kapjuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty}[c_n + (n+2)(n+1)c_{n+2}]\mathbf{x}^n = \mathbf{0}$. A jobboldalon a $\mathbf{0}$ hatványsor van, ezért a baloldalon minden együttható 0 kell legyen. Innen a kovetkező rekurziós képlethez jutunk:

$(n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n = 0, \quad \forall n \geq 0$ esetén. Megjegyezhetjük, hogy az együtthatók lehetnek általánosított számok is, sőt, de most az átláthatóság kedvéért valós számokkal dolgozunk, de teljesen mindegy.

Mivel másodrendű egyenletünk van, ezért elvárnánk, hogy két konstanstól függjön, de ez így is lesz, mert a rekurziós összefüggés is másodrendű, a megoldásához két tagot kell ismerjünk, feltételezzük, hogy ezek: c_0 és c_1.

Ha elvégezzük a számításokat azt kapjuk, hogy $c_{2k} = (-1)^k \frac{c_0}{(2k)!}$, illetve $c_{2k+1} = (-1)^k \frac{c_1}{(2k+1)!}$. Ezeket visszahelyettesítve a következőt kapjuk:

$$\mathbf{y} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{c_0}{(2k)!}\mathbf{x}^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{c_1}{(2k+1)!}\mathbf{x}^{2k+1}$$

Ha megfigyeljük az így kapott függvény a következő formában írható:

$$\mathbf{y} = c_0 \cos \mathbf{x} + c_1 \sin \mathbf{y}$$

Ez nyilván jó, mert valós esetben ez a megoldás.

De

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}_0 \cos \mathbf{x} + \mathbf{c}_1 \sin \mathbf{y}$$

ez a valódi megoldás.

17. Tétel. *(Mészáros Alpár Richárd) Bármely* ***GNS****-en értelmezett n-edrendű lineáris állandó együtthatós homogén differenciálegyenletnek van* ***GNS****-analitikus megoldása.*

Bizonyítás:

Valós számtesten értelmezett hasonló egyenletnek tudjuk, hogy van megoldása az adott értelmezési intervallumon. Monst vizsgálnunk kell ezt az egyenletet **GNS**-en. Legyen az egyenletünk a következő:

$$L[\mathbf{y}] = \mathbf{a}_n\mathbf{y}^{(n)} + \mathbf{a}_{n-1}\mathbf{y}^{(n-1)} + \ldots + \mathbf{a}_0\mathbf{y} = \mathbf{0}$$

Feltételezzük, hogy $\mathbf{y} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{c}_k\mathbf{x}^k$ alakú és igazoljuk, hogy megszerkeszthetőek az együtthatók úgy, hogy $L[\mathbf{y}] = 0$ igaz kijelentés legyen.

y legalább n-szer differenciálható kell legyen, ez nyilvánvaló, most felírjuk a deriváltakat a hatványsor deriválása segítségével, majd ezeket összegezzük.

$$\mathbf{y}^{(p)}(\mathbf{x}) = \sum_{k=p}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-p+1)\mathbf{c}_k\mathbf{x}^{k-p}$$

$$\mathbf{y}^{(p)}(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+p)(k+p-1)\ldots(k+1)\mathbf{c}_{k+p}\mathbf{x}^k$$

$$\mathbf{y}^{(p)}(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+p)!}{k!}\mathbf{c}_{k+p}\mathbf{x}^k$$

Ezekben az esetekben minden $0 \leq p \leq n$-re igaz.

$$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathbf{a}_n\frac{(k+n)!}{k!}\mathbf{c}_{k+n} + \mathbf{a}_{n-1}\frac{(k+n-1)!}{k!}\mathbf{c}_{k+n-1} + \ldots + \mathbf{a}_0\frac{k!}{k!}\mathbf{c}_k\right)\mathbf{x}^k = \mathbf{0}$$

Mivel az egyenlet n-edrendű, n darab konstanst megadva tekintük ahhoz, hogy fel tudjuk írni az általános megoldását az egyenletnek ennyi darab konstansra van szükségünk. Legyenek ezek a $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_{n-1}$. Ezek segítségével kell meghatározzuk a hatványsor többi együtthatóját. Ezeket meghatározhatjuk a következő rekúrziós összefüggésből:

$$\mathbf{a}_n(k+n)!\mathbf{c}_{k+n} + \ldots + \mathbf{a}_0 k!\mathbf{c}_k = \mathbf{0}$$

Ezek egyértelműen meghatározhatók az $\mathbf{a}_i$-k függvényében, ha nem **0**-k ezek. Ha netalán valamelyik **0**, akkor más $\mathbf{c}_i$-t tekintünk adottnak.

Tehát az így képzett **y** megoldása lesz az L[**y**]=**0** egyenletnek.

∎

Az előző tétel következményeként kijelenthetünk két általánosabb tételt.

18. Tétel. *(Mészáros Alpár Richárd) Legyen*

$$L[\boldsymbol{y}] = \boldsymbol{a}_n\boldsymbol{y}^{(n)} + \boldsymbol{a}_{n-1}\boldsymbol{y}^{(n-1)} + \ldots + \boldsymbol{a}_0\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

egy ***GNS****-beli n-edrendű lineáris inhomogén egyenlet. L[****y****]=****f****(****x****)-nek akkor és csak akkor van* ***GNS****-analitikus megoldása, ha* ***f GNS****-analitikus a létezési halmazán.*

Bizonyítás:

A tétel bizonyítása teljesen analóg módon történik, mint a 17. Tétel esetében. Ez a tétel lényegében az említett tétel általánosabb megfogalmazása. A bizonyítás menetében az a különbség, hogy amikor a hatványsor együtthatóit határozzuk meg, a jobboldalon nem a nulla hatványsor lesz, hanem egy nem triválás hatványsor. Itt a megfelelő tagok együtthatója kell megegyezzen, ezekből az összefüggésekből tudjuk meghatározni a $\mathbf{c}_i$ együtthatókat.

■

19. Tétel. *(Mészáros Alpár Richárd) Legyen*

$$L[\boldsymbol{y}] = \boldsymbol{a}_n(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}^{(n)} + \boldsymbol{a}_{n-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}^{(n-1)} + \ldots + \boldsymbol{a}_0(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

egy ***GNS****-beli n-edrendű lineáris inhomogén egyenlet, ahol* $\boldsymbol{a}_0, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ ***GNS****-beli függvények. Az L[****y****]=****f****(****x****)-nek akkor és csak akkor van* ***GNS****-analitikus megoldása, ha* ***f GNS****-analitikus a létezési halmazán és az együttható függvények* ***GNS****-beli polinomfüggvények.*

Bizonyítás:

A tétel bizonyítása azonnali az előző két tétel alkalmazásával.

■

17. Megjegyzés. *Ha bevezetnénk a* $\boldsymbol{GNS} \times \boldsymbol{GNS}, \ldots, \boldsymbol{GNS}^n$ *halmazokat, értelmezhetnénk akár többváltozós függvényeket általánosított számokon és megadhatnánk például az általánosított hatványsorok fogalmát is ilyen értelemben, illetve az ilyen értelemben vett analitikus függvények fogalmát. De ezen struktúrák tulajdonságainak vizsgálatát talán mellőzzük ezennel. Csak azért tértünk ki erre, mert ilyen értelemben megfogalmazhatjuk a következő sejtést:*

20. Tétel. *(Cauchy-Lindelöff) Legyen a következő Cauchy-feladat:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \\ \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{a} \end{cases}$$

ahol $\boldsymbol{I} \in \boldsymbol{GNS}$ *és* $\Omega \in \boldsymbol{GNS}^n$*.*

Ha $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{I} \times \Omega \longrightarrow \boldsymbol{GNS}^n$ *analitikus az* $\boldsymbol{I} \times \Omega$*-n, akkor* $\forall(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{a}) \in \boldsymbol{I} \times \Omega$ *esetén a fennti Cauchy-feladatnak egyetlen telített megoldása létezik, amely analitikus a létezési halmazán.*

5.4. A GNS-beli Bessel-függvény

A valós számok halmazán tanulmányozott közönséges differenciálegyenletek egyik nagyon lényeges egyenlete az úgynevezett Bessel-egyenlet. Ezen egyenlet megoldásainak, az úgynevezett elsőrendű, illetve másodrendű Bessel-függvényeknek nagyon jelentős szerepük van a matematika számos területén. Ezen függvényeket próbáljuk megadni **GNS** reprezentációban.

Elsősorban az elsőrendű függvénnyel foglalkozunk a továbbiakban.

24. Értelmezés. *(Mészáros Alpár Richárd) Legyen $\boldsymbol{J}_n(\boldsymbol{x})$ a következő hatványsor:*

$$\boldsymbol{J}_n(\boldsymbol{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{\boldsymbol{x}}{2}\right)^{2m+n}$$

*Ez a hatványsor nyilván konvergens gyenge értelemben egy adott konvergencia sugárral. Ezt a hatványsort **GNS**-beli Bessel-függvénynek nevezzük.*

25. Értelmezés. *(Mészáros Alpár Richárd) Legyen a következő differenciálegyenlet **GNS**-en:*

$$\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y}'' + \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}' + (\boldsymbol{x}^2 - n^2)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$$

ahol n nem negatív egész szám.

*Könnyen belátható, hogy a fenntebb értelmezett Bessel-függvény megoldása az adott egyenletnek. Ezt az egyenletet **GNS**-en értelmezett Bessel-egyenletnek nevezzük.*

Végszóként megjegyezendő, hogy az ilyen értelemben vett Bessel-függvény, illetve egyenlet formailag teljesen azonos a valósbelivel, mégis ennek ellenére teljesen más tartalmat takar.

További kutatások céljaként kitűzhető a 17. Megjegyzésben megfogalmazott struktúrák vizsgálata, a Cauchy-Lindelöff egyenlet **GNS**-beli kiterjesztése és más valósbeli differenciálegyenletek vizsgálata a **GNS** testen.

Jelentős szerepe van az első és másodrendű Bessel-függvények tanulmányozásának, tulajdonságaik vizsglatának.

Hivatkozások

[1] Yi Lin, *General Systems Theory - A Mathematical Approach*, IFSR International Series on System Sciece and Engineering, Volume 12, (2002)

[2] S.-T. Wang, *A non-Archimedean number field and its applications in modern physics*, The Mathematical Heritage of C. F. Gauss. World Scientific, Singapor, pp. 810-826, (1991)

[3] S.-T. Wang, *Generalized number system and its applications I*, Tsukuba J. Math., 9, No. 2, 203-15, (1985)

[4] Khodr Mahmoud Shamseddine, *New Elements of Analysis on the Levi-Civita Field*, Dissertation, Michigan State University, (1999)

[5] Khodr Mahmoud Shamseddine, Martin Berz, *Analytical properties of power series on Levi-Civita field*, Annales Mathématiques Blaise Pascal, Vol. 12, No. 2, (2005)