Differenciálegyenletek a Levi-Civita számtesten. Alkalmazás Bessel típusú speciális függvényekre

XII. Erdélyi Tudományos Diákköri Konferencia
Kolozsvár, 2010. május 14-16

Szerző: Mészáros Alpár Richárd, BBTE, MIK
Matematika-Informatika szak, III. év
Témavezető: dr. András Szilárd, adjunktus BBTE, MIK,
Alkalmazott Matematika tanszék

Kivonat

A dolgozatban a Levi-Civita számtesten értelmezett differenciálegyenletek, egyenletrendszerek megoldásához szükséges eszközöket teremtjük meg. Mátrix exponenseket értelmezünk, majd egy új függvényosztályt adunk meg, mely által reprezentálni tudjuk a lineáris egyenletek nem analitikus megoldásait, ez által teljessé téve a lineáris differenciálegyenletek, egyenletrendszerek megoldásainak terét, a klasszikus analitikus megoldások mellett.

A továbbiakban ezen eredményt felhasználjuk Bessel típusú speciális függvények értelmezéséhez, valamint tulajdonságainak vizsgálatához a Levi-Civita számtesten.

Annak érdekében, hogy a klasszikus Bessel függvények tulajdonságait a lehető legnagyobb mértékben kiterjeszteni tudjuk a Levi-Civita számtestre, a Baricz Árpád[1] által tanulmányozott általánosított elsőfajú Bessel függvények tulajdonságait próbáljuk tanulmányozni, illetve integrál reprezentációt adunk rájuk ezen a számtesten.

Kulcsszavak: Levi-Civita számtest, mátrix exponensek, nem analitikus megoldások, Bessel típusú speciális függvények, általánosított elsőfajú Bessel függvények

[1] bariczocsi@yahoo.com

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

1.1. A Levi-Civita számtest fontossága

A Levi-Civita számtestnek nagyon nagy jelentősége van többek között valós függvények magasabbrendű deriváltjainak a numerikus meghatározásában, ODE-k és PDE-k numerikus megoldásában. A hatékony numerikus differenciálásnak nagy fontontossága van olyan fizikai és mérnöki elméletekben, mint a perturbációk, vagy aberrációk elmélete. Annak ellenére, hogy tudjuk, hogy egy bizonyos függvénynek létezik egy bizonyos pontban valamilyen magasabb rendű deriváltja, a legtöbb esetben a numerikus módszerek csődöt mondanak, mivel a hiba nagyon nagy lesz. Gyakran már harmad, negyedrendű deriváltak esetén a hiba akkora lehet, hogy az eredmény használhatatlan.

Az alkalmazások elméleti háttere nagy részletességgel olvasható ([1])-ben a 7. Fejezetben, ahol a szerző alapos betekintést nyújt a komputacionális függvények elméletébe.

Ezen problémák és más problémák megoldására adtak választ Matrin Berz[2] és kutatótársai, amikor is a Levi-Civita számtestet használták numerikus módszerek implementálásához.

1.2. COSY INFINITY

A COSY INFINITY rendszert a fent említett Martin Berz és kutató társai alkották meg. Ezen rendszer működése a Levi-Civita számtest tulajdonágain alapszik.([4])

Mi is valójában a COSY INFINITY? Egy rendszer a modern tudományos számítástechnika számos haladó szintű fogalmának használatára. A COSY rendszer a következő részekből tevődik össze:

- Magasan optimalizált adattípusok gyűjteménye. Különösebben:

  - A differenciál algebrai típusok magasrendű ODE-k, Folyamok, PDE-k tanulmányozására. Ugyanakkor lehetőség van magasrendű differenciálszámításra.

  - A Taylor model típus, amelyet szigorú magasrendű számítások véghezviteléhez, gyakran a függőségek nagymértékű leszűkítésével használnak. Eszközök találhatók differenciálásra alapozott „box-rejection” technikákra, feltételek kielégítésekre ODE-k és PDE-k esetén.

[2] $http://bt.pa.msu.edu/index\_berz.htm$

- A COSYScript környezet a típusok használatára. Objektum orientált felépítésű és támogatja a polimorfizmust, kompakt és egyszerű szintaxissal.

- Interfészek léteznek C++ és F90 nyelvekre, hogy könnyen használható legyen külsőprogramok által objektum orientált nyelvekre.

1.3. Egyéb alkalmazhatóságok

A Levi-Civita számtest nagy mértékben használható sugárfizikai problémák megoldásához. Jelentős eredményeket értek el a sugárfizikában a Levi-Civita számtest alkalmazásával([6]).

1.4. Alapértelmezések

A következőkben néhány értelmezést adunk meg [1] és [2] alapján.

1. Értelmezés. *(Bal-véges halmazok családja) Egy $M \subset \mathbb{Q}$ részhalmazt akkor és csakis akkor nevezünk bal-végesnek, ha $\forall r \in \mathbb{Q}$ esetén véges sok érték van az M-ben, amelyek kisebbek, mint r. A $\mathbb{Q}$ összes bal-véges részhalmazainak a családját $\mathcal{F}$-el jelöljük.*

2. Értelmezés. *(Az $\mathcal{R}$ halmaz)([1])*

$$\mathcal{R} = \{f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R} : \{x|f(x) \neq 0\} \in \mathcal{F}\}$$

1. Megjegyzés. *A következőkben az $\mathcal{R}$ elemeit $x, y, \ldots$-al jelöljük, és értéküket egy $q \in \mathbb{Q}$-ban $x[q]$-val, annak érdekében, hogy elkerüljük a félreértést az $\mathcal{R}$-en értelmezett függvények behelyettesítési értékével.*

3. Értelmezés. *(supp,λ,$\sim$,$\approx$,$=_r$)([1])*
$supp(x) = \{q \in \mathbb{Q} : x[q] \neq 0\}$ az x szupportjának nevezzük;
$\lambda(x) = min(supp(x)), \forall x \neq 0$, ami létezik az $\mathcal{R}$ bal-véges volta miatt;
$\lambda(0) = +\infty$;
Összehasonlítva két $\mathcal{R}$-beli elemet azt mondjuk, hogy:
$x \sim y$, akkor és csakis akkor, ha $\lambda(x) = \lambda(y)$;
$x \approx y$, akkor és csakis akkor, ha $x[\lambda(x)] = y[\lambda(y)]$;
$x =_r y$, akkor és csakis akkor, ha $x[q] = y[q], \forall q \leq r$ esetén.

4. Értelmezés. *(Összeadás és szorzás $\mathcal{R}$-en)([1])*

$$(x + y)[q] = x[q] + y[q], \forall x, y \in \mathcal{R}, \forall q \in \mathbb{Q}$$

$$(x \cdot y)[q] = \sum_{q_x, q_y \in \mathbb{Q}, q_x + q_y = q} x[q_x] \cdot y[q_y]$$

5. Értelmezés. *(Az $\mathcal{R}^+$ halmaz)([1])*

$$\mathcal{R}^+ = \{x \in \mathcal{R} : x[\lambda(x)] > 0\}$$

6. Értelmezés. *(Rendezési reláció $\mathcal{R}$-en) Legyenek $x, y \in \mathcal{R}$ különbözőek. Ekkor azt mondjuk hogy $x > y$ akkor és csak akkor, ha $x-y \in \mathcal{R}^+$. Máskülönben azt mondjuk, hogy $x < y$, vagy $y > x$.*

2. Megjegyzés. *Mivel az $\mathcal{R}$-beli számoknak bal-véges szupportjuk van, elmondhatjuk, hogy a „+" és „·" műveletekkel $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ egy test, amelybe a valós számok halmaza izomorf módon beágyazható a követkeő beágyazással:*

$$\Pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{R}, \quad \Pi(x)[q] = \begin{cases} x, & ha\ q = 0 \\ 0, & ha\ q \neq 0 \end{cases}$$

7. Értelmezés. $(<<, >>)$*([1]) Legyenek $a, b \in \mathcal{R}$, nemnegatívak. Ekkor azt mondjuk, hogy a végtelenszer kisebb, mint b és azt írjuk, hogy $a << b$, ha bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $n \cdot a < b$. Azt mondjuk, hogy a végtelenszer nagyobb, mint b, ha $b << a$. Ha $a << 1$, azt mondjuk, hogy a végtelenül kicsi, ha $a >> 1$, akkor a végtelenül nagy. A végtelenül kis számokat infinitesszimálisaknak, vagy differenciálaknak mondjuk. A végtelenül nagy számokat végtelennek nevezzük. Azokat a nemnegatív számokat, amelyek nem végtelenül kicsik, se nem végtelenül nagyok, végeseknek nevezzük.*

8. Értelmezés. *(A d szám)([1]) Legyen $d \in \mathcal{R}$ úgy, hogy $d[1] = 1$ és $d[q] = 0, \forall q \neq 1$.*

Könnyű belátni, hogy $0 < d^q << 1$ akkor és csak akkor, ha $q > 0$ és $d^q >> 1$, ha $q < 0$. Innen következik összességében, hogy az $\mathcal{R}$ Levi-Civita test egy teljesen rendezett nem-arkhimédészi kiterjesztése a valós szḿok testének.

2. Mátrix exponensek $\mathcal{R}$-en

Ahhoz, hogy közönséges differenciálegyenletekből álló rendszerek megoldhatótságát könnyen tárgyalni tudjuk $\mathcal{R}$-en, szükséges, hogy az $\mathcal{R}$-beli mátrix exponensek tulajdonságait vizsgáljuk.

De először az $\mathcal{R}$-beli elemket tartalmazó mátrixok tulajdonságait vizsgáljuk.

2.1. $\mathcal{R}$-beli mátrixok

9. Értelmezés. *Legyen* $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{R})$ *és* $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathcal{R})$*, valamint* $\lambda \in \mathcal{R}$*, ahol* $n, m, p \in \mathbb{N},\ n, m, p \geq 1$*, illetve* $A = (a_{ij})_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$*,* $B = (b_{ij})_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$ *és* $C = (c_{ij})_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,p}}$*. Ekkor értelmezzük a következőket:*

1. $A + B = B + A = (a_{ij} + b_{ij})_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$
2. $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$
3. $A \cdot C = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj} \right)_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,p}}$

3. Megjegyzés. *Mindhárom alpont esetében az illető mátrixok jól értelmezettek, felhasználva az* $\mathcal{R}$*-en értelmezett műveletek tulajdonságait.*

10. Értelmezés. *Legyen* $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{R})$*. Azt mondjuk, hogy* A *invertálható, ha* $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathcal{R}) :\ A \cdot B = B \cdot A = I_n$*. Ekkor* $A^{-1} = B$*, ahol* $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathcal{R})$ *és* $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.

1. Tétel. *Az* $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{R})$ *akkor és csak akkor invertálható, ha* $\det A \neq 0$*. Ekkor az inverz mátrix megadható a jól ismert Cramer szabály segítségével.*

Bizonyítás:

A bizonyítás azonnali, felhasználva a valós mátrixok tulajdonságait, amelyek analóg módon átvihetők tetszőleges testekre.

■

2.2. Mátrix exponensek

11. Értelmezés. *Legyen* $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{R})$*. Ekkor* A *mátrix exponens alatt az*

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

sort értjük.

A feladatunk az lenne, hogy vizsgáljuk az előbbi értelmezésben szereplő sor konvergenciáját vagyis, hogy megnézzük, hogy mikor lesz jól értelmezett. Erre vonatkozik a következő tétel.

Felhasználjuk még természetesen az exponenciális függvény értelmezését $\mathcal{R}$-en, amely megtalálható [1]-ben.

Előtte azonban megadunk egy pár értelmezést és tulajdonságot, amelyekre szükségünk lesz a továbbiakban.

12. Értelmezés. *Legyen $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{R})$. Ekkor az A mátrix normája alatt az A mátrix maximum normáját értjük, vagyis*

$$||A|| = \max_{1 \leq i,j \leq n} \{|a_{ij}|\}.$$

Az illető norma rendelkezik a hagyományos maximum mátrix norma tulajdonságaival.

13. Értelmezés. *Legyen $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{R})$. Ekkor azt mondjuk, hogy a $\sum_{k=0}^{\infty} c_n A^k$ sor konvergens $\mathcal{M}_n(\mathcal{R})$-ben, ha $\sum_{k=0}^{\infty} c_n ||A^k||$ sor konvergens $\mathcal{R}$-ben.*

2. Tétel. *Bármilyen $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{R})$ esetén e^A jól értelmezett, vagyis az*

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

sor mindig konvergens.

Bizonyítás:

Legyen $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$. Mivel A véges sok elemet tartalmaz, és mivel $\mathcal{R}$ teljesen rendezett test, ezért $\exists M \in \mathcal{R}$: $|a_{ij}| < M$, $\forall i,j = \overline{1,n}$. A gondolatot tovább folytatva, jelöljük $A^2 = (a_{ij}^2)_{i,j=\overline{1,n}}$, ekkor elmondhatjuk, hogy $|a_{ij}^2| < nM^2$, $\forall i,j = \overline{1,n}$.

Általánosan ha $A^k = (a_{ij}^k)_{i,j=\overline{1,n}}$, akkor $|a_{ij}^k| < n^k M^{k+1}$, $\forall i,j = \overline{1,n}$.

Ekkor felírhatjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} ||A^k|| < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} n^k M^{k+1}$$

De

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} n^k M^{k+1} = M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} n^k M^k = M e^{nM},$$

ezért a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} n^k M^{k+1}$ sor konvergens.

Tehát az $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ sor is konvergál egy $\mathcal{M}_n(\mathcal{R})$-beli mátrixhoz.

$\blacksquare$

4. Megjegyzés. *Az előző tétel bizonyításának utolsó lépésében felhasználtuk az összehasonlítási kritériumot az $\mathcal{R}$-en értelmezett sorokra, amely természetes módon megfogalmazható.*

Megfogalmazhatjuk a következő tulajdonságokat a mátrix exponensekre:

1. Tulajdonság. *Legyenek $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathcal{R}),\ a, b \in \mathcal{R}$. Ekkor igazak a következők:*

1. $e^{O_n} = I_n$;
2. $e^{aA}e^{bA} = e^{(a+b)A}$;
3. $e^{A}e^{-A} = I_n$;
4. *Ha A és B kommutálnak, akkor* $e^{A+B} = e^{A}e^{B}$;
5. $\det e^{A} = e^{trA}$, *ez azt jelenti, hogy bármilyen $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{R})$ esetén e^{A} invertálható, és $(e^{A})^{-1} = e^{-A}$.*

Bizonyítás:

Igazolni fogjuk a 4. tulajdonságot, az előző három ennek a tulajdonságnak a következménye lesz.

(4) Az ([1], 4.9 Tétel)-t megfogalmazhatjuk $\mathcal{M}_n(\mathcal{R})$-beli sorokra is. Ezt azért tehetjük meg, mert a mátrixokból álló sorok konvergenciáját felfoghatjuk úgy is, mintha minden mátrixelemre felírnánk a konvergenciát. Ezért, mivel $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k$, illetve $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}B^k$ sorok konvergálnak, következtethetünk, hogy az illető két sor szorzata a ugyanoda konvergál, mint a $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{k!}A^k \frac{1}{(k-i)!}B^{k-i}$ sor. De

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{k!}A^k \frac{1}{(k-i)!}B^{k-i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!}A^i \frac{1}{(k-i)!}B^{k-i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(A+B)^k.$$

Itt felhasználtuk, hogy A és B mátrixok kommutálnak. De az világos, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(A+B)^k = e^{A+B},$$

amit igazolni kellett.

(5) Ezen alpont bizonyítása is a valósbeli bizonyítás alapján írható fel. Az előző alpont esetén is az jelentette a bizonyítás nehézségét, hogy az $\mathcal{R}$-beli sorok tulajdonságaira kellett támaszkodjuk, de ez nagy részletességgel

megtalálható ([1])-ben. Ezekre a tulajdonságokra hivatkozva ez az alpont bizonyítása is azonnali. A valósbeli bizonyítás megtalálható ([7])-ben, a 172. oldalon.

■

Az $\mathcal{R}$-en értelmezett mátrix exponenseket könnyen meghatározhatjuk „jól viselkedő” mátrixok esetén, hasonlóan a valós vagy komplex esethez. Ezeket a mátrixokat jellemezhetjük a következő tulajdonság segítségével:

2. Tulajdonság. *Legyen $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{R})$. Ekkor*

1. *Ha A diagonális, vagyis* $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$, *ahol* $a_i \in \mathcal{R}, \forall i = \overline{1, n}$, *akkor*
$$e^A = \begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{a_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & e^{a_n} \end{pmatrix};$$

2. *Ha A nilpotens, vagyis* $\exists q \in \mathbb{N},\ q \geq 1 :\ A^q = O_n$, *akkor*
$$e^A = I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots + \frac{1}{(q-1)!}A^{q-1};$$

3. *Ha $A = X + N$, ahol $X, N \in \mathcal{M}_n(\mathcal{R})$, $XN = NX$, és X diagonális, illetve N nilpotens, akkor*
$$e^A = e^{X+N} = e^X e^N;$$

Bizonyítás:

A bizonyítás azonnali az első két tulajdonság esetén, a harmadik is nyilvánvaló, használva az előző tulajdonságot.

■

3. Tétel. *Legyen $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{R})$ és legyen $F : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathcal{R})$, $F(t) = e^{tA}$. Ekkor az F operátor differendiálható minden $t \in \mathcal{R}$ pontban és*

$$F'(t) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) = Ae^{tA}.$$

Bizonyítás:

Ahhoz, hogy igazoljuk a fenti összefüggést, felírjuk az F operátort hatványsor formájában, majd formálisan deriválhatunk.

$$F'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{t^k}{k!} A^k = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = Ae^{tA} = AF(t).$$

Az eredmény hatványsor biztos jól értelmezett lesz szintén.

$\blacksquare$

3. Lineáris differenciálegyenletek $\mathcal{R}$-en

A következőkben azt szeretnénk, hogy lineáris differenciálegyenletek összes megoldását adjuk meg $\mathcal{R}$ számtesten. Ezt megvalósíthatjuk, ha olyan függvényteret definiálunk, amely segítségével felírható minden lineáris differenciálegyenlet nem analitikus megoldása.

4. Tétel. *([3]) Az $y' = 0$ differenciálegyenlet megoldástere végtelen dimenziós $[-1, 1] \subset \mathcal{R}$-en.*

5. Megjegyzés. *Shamseddine a [3] dolgozatában igazolta a fenti tételt és a bizonyításban szerkesztett egy olyan függvénysorozatot, amely minden tagja megoldása a tételben szereplő egyenletnek.*

Bizonyítás(tétel[3]):

$\forall x \in [-1, 1] \subset \mathcal{R},\ \forall \varepsilon \in \mathcal{R},\ \varepsilon > 0$, ekkor legyen $\delta = \min\{\varepsilon^2, d\}$.

$$\forall n \in \mathbb{N} :\ g_n : [-1, 1] \longrightarrow \mathcal{R},\ g_n(x)[q] = x\left[\frac{q}{(n+1)}\right].$$

Egyszerű belátni, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$ esetń g_n lineáris.

Igazoljuk, hogy g_n differenciálható minden $[-1, 1]$-beli pontban $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén és $g_n'(x) = 0,\ \forall x \in [-1, 1]$.

Először is $g_n(y-x) \sim (y-x)^{n+1},\ \forall x, y \in [-1, 1]$, a szerkesztésből adódóan. Másfelöl legyen $y \in [-1, 1] :\ 0 < |y - x| < \delta$, ekkor

$$\left|\frac{g_n(y) - g_n(x)}{y - x}\right| = \left|\frac{g_n(y - x)}{y - x}\right| \sim |y - x|^n.$$

Az előbbieket figyelembe véve a fenti összefüggés pontosan $g_n'(x)$, ami 0 lesz.

Ezt nyilván igaz $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén.

Most azt kell még belátni, hogy az $S = \{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ lineárisan független rendszer a $[-1, 1]$-en.

Így legyen $j \in \mathbb{N}$ és legyenek $n_1 < n_2 < \ldots < n_j$, $\mathbb{N}$-beli adott számok. Most megmutatjuk, hogy $g_{n_1}, g_{n_2}, \ldots, g_{n_j}$ lineárisan függetlenek a $[-1, 1]$-en. Tételezzük fel, hogy $c_1 g_{n_1} + c_2 g_{n_2} + \ldots + c_j g_{n_j} = 0$ valamely $c_1, c_2, \ldots, c_j \in \mathcal{R}$ esetén és megmutatjuk, hogy $c_1 = c_2 = \ldots = c_j = 0$. Mivel $c_1 g_{n_1} + c_2 g_{n_2} + \ldots + c_j g_{n_j} = 0$, innen azt kapjuk, hogy $c_1 g_{n_1}(d) + c_2 g_{n_2}(d) + \ldots + c_j g_{n_j}(d) = 0$, vagyis $c_1 d^{n_1} + c_2 d^{n_2} + \ldots + c_j d^{n_j} = 0$. Innen nyilván következtethetünk, hogy $c_1 = c_2 = \ldots = c_j = 0$.

Ezzel igazolva van a tétel.

$\blacksquare$

A következőkben a tételben szereplő megoldásoknál általánosabb megoldásokat próbálunk megadni, arra törekedve, hogy megadjuk $y' = 0$ differenciálegyenlet összes nem analitikus megoldását.

A tételbeli függvénysorozat szerkesztését figyelembe véve megfogalmazhatunk két tételt, amelyek következményei az előző tételnek.

5. Tétel. *Legyen $f : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$. Ha $\forall x, y \in \mathcal{R} :\ |x - y| < d$ esetén f teljesíti az*

$$|f(x) - f(y)| \sim |x - y|^p,\ p > 1$$

összefüggést, akkor az f megoldása az $y' = 0$ differenciálegyenletnek.

Bizonyítás:

Igazolni szeretnénk, hogy a kijelentésben szereplő tulajdonsággal rendelkező függvények differenciálhatóak $\forall x \in \mathcal{R}$ esetén, illetve $f'(x) = 0,\ \forall x \in \mathcal{R}$.

Ekkor $\forall \varepsilon > 0$ legyenek $\delta = \min\{\varepsilon^2, d\}$, $x \in \mathcal{R}$ tetszőleges rögzített, illetve $y \in \mathcal{R} : |x - y| < \delta$. Ekkor

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \sim |x - y|^{p-1}.$$

Mivel $|x - y| < d$, következik, hogy $\forall n \in \mathbb{Q}, n > 0$ esetén $|x - y|^n$ infinitesszimális. Nyilván ha $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{R},\ \alpha, \beta > 0,\ \lambda(\alpha) = \lambda(\beta)$ és α infinitesszimális, akkor β is infinitesszimális. Ez azt jelenti, hogy

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| < \varepsilon,$$

ami az ε és x megválasztásának tetszőleges volta miatt azt mutatja, hogy $\forall x \in \mathcal{R}$ esetén f differenciálható és $f'(x) = 0$, amit igazolni akartunk.

■

6. Tétel. *Legyen* $f : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$. *Ha* $\forall x, y \in \mathcal{R}$ *esetén*

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|^p,$$

ahol $\alpha \in \mathcal{R}$, $\alpha \leq d$ *és* $p > 1$, *akkor* f *megoldása az* $y' = 0$ *differenciálegyenletnek.*

Bizonyítás:

A bizonyítás gondolatmenete hasonló az előbbi tétel bizonyításának gondolatmnetéhez. Ekkor $\forall \varepsilon > 0$ legyenek $\delta = \min\{\varepsilon^2, d\}$, $x \in \mathcal{R}$ tetszőleges rögzített, illetve $y \in \mathcal{R} : |x - y| < \delta$. Ekkor

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leq \left|\frac{\alpha(x - y)^p}{x - y}\right| = \alpha(x - y)^{p-1} < \alpha\delta^{p-1} \leq \alpha d^{p-1} \leq d^p << \varepsilon.$$

Innen következik, hogy

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| < \varepsilon.$$

Mivel az ε és x választása tetszőleges, ez azt jelenti, hogy f megoldása az $y' = 0$ differenciálegyenletnek $\mathcal{R}$-en, amit bizonyítani szerettünk volna.

■

1. Lemma. $\forall x, y \in \mathcal{R} \Longrightarrow \lambda(xy) = \lambda(x) + \lambda(y)$

Bizonyítás:

Legyenek $q_x, q_y \in \mathbb{Q}$ úgy, hogy $q_x = \lambda(x)$ és $q_y = \lambda(y)$. Ha a két szám szorzásának algoritmusát próbáljuk elképzelni, akkor könnyen belátható, hogy $\lambda(xy) \geq \max\{\lambda(x), \lambda(y)\}$. Mivel $x[q] = 0, \forall g < q_x$ és $y[q] = 0, \forall q < q_y$ ezért $xy[q] = 0, \forall q < q_x + q_y$. De tudjuk, hogy $x[q_x] \neq 0$ és $y[q_y] \neq 0$, ezért $xy[q_x + q_y] \neq 0$. Innen $\lambda(xy) = \lambda(x) + \lambda(y)$.

■

2. Lemma. *Legyenek* $x, y \in \mathcal{R}$. *Ha létezik* $r \in \mathbb{Q} : r \geq \lambda(x)$ *és* $x =_r y$, *akkor* $\forall n \in \mathbb{N}$ *esetén* $x^n =_{nr} y^n$.

Bizonyítás:

Figyelembe vesszük a szorzás értelmezését $\mathcal{R}$-en és megvizsgáljuk, hogyan változnak az egyes szinten levő elemek egy adott $x \in \mathcal{R}$ hatványozásakor.

A lemma kijelentésében szereplőket szemléltetni próbáljuk.

Legyenek $m_1, m_2 \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}, k \leq \min\{m_1, m_2\}$ és legyenek a következő valós együtthatós polinomok:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{k+1}x^k + b_{k+2}x^{k+1} \ldots + b_{m_1+1}x^{m_1};$$

$$Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{k+1}x^k + c_{k+2}x^{k+1} \ldots + c_{m_1+1}x^{m_1}.$$

Látható, hogy a két polinom esetében az első $k+2$ együttható megegyezik. Az is látható, hogy ha elkezdjük hatványozni a polinomokat, ez a tulajdonság megmarad. Ugyanis az x^k-ig a tagok az együtthatói csak csak az a_i tagok valamilyen függvénye, nem keverednek be a b_i-k a P polinom esetében, illetve a c_i-k a Q esetében.

Mivel az $\mathcal{R}$ en értelmezett szorzás kiszámolás analóg módon elképzehető polinomok szorzásával, ezért a lemmabeli tulajdonágot a fenti szemléltetés alapján beláthatjuk. Még csak annyit kell megvizsgálni, hogy honnan jön a nr a lemma következtetésében. Ez viszont következik az 1. Lemma alapján.

$\blacksquare$

7. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathcal{R}$ nyílt, $k > 0, k \in \mathbb{N}$ rögzített és $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $g_n : M \longrightarrow \mathcal{R}$,*

$$g_n(x)[q] = x^k \left[\frac{qk}{n+1}\right].$$

Ekkor g_n differenciálható M-en, $\forall n \in \mathbb{N}$ és $g_n'(x) = 0,\ \forall x \in M,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Mitöbb a $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ lineárisan független rendszer M-ben, ha $d \in M$.

Bizonyítás:

Mivel $\forall x \in \mathcal{R}$ és $\forall k \in \mathbb{N}$ esetén az 1. Lemmából $\lambda(x^k) = k\lambda(x)$, illetve a 3. Tételbeli szerkesztésből következik, hogy $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in M:\ g_n(x) \sim x^{n+1}$.

A következőkben igazoljuk, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén g_n differenciálható $\forall x \in M$ esetén és $g_n'(x) = 0,\ \forall x \in M$.

$\forall \varepsilon \in \mathcal{R},\ \varepsilon > 0$ esetén legyen $\delta = \min\{\varepsilon^2, d\}$. Ekkor $\forall x \in M$ és $\forall y \in M$: $|x - y| < \delta,\ x \neq y,\ \forall n \in \mathbb{N}$ esetén vizsgáljuk a következő kifejezést:

$$\left|\frac{g_n(x) - g_n(y)}{x - y}\right|.$$

1. eset: Ha $\lambda(x) \neq \lambda(y)$, akkor nyilván $\lambda(x^k) \neq \lambda(y^k)$. Innen az következik, hogy

$$\left|\frac{g_n(x) - g_n(y)}{x - y}\right| \sim (x - y)^n.$$

Mivel $|x-y| < \min\{\varepsilon^2, d\}$, innen következik, hogy $|x-y|^n << \varepsilon$. Tudva azt, hogy $\forall x \in \mathcal{R}$ esetén ha $x \sim \alpha$ és α infinitesszimális, akkor x is infinitesszimális, következtethetünk, hogy

$$\left|\frac{g_n(x)-g_n(y)}{x-y}\right| < \varepsilon.$$

Figyelembe véve, hogy a fenti összefüggés tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén teljesül, innen következik, hogy

$$g_n'(x) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in M.$$

2. eset: Ha $x \sim y$ és $x[\lambda(x)] \neq y[\lambda(y)]$, akkor az előző esethez hasonló gondolatmenet teljesül.

3. eset: Ha $x =_r y$, valamely $r \in \mathbb{Q}$, $r \geq \lambda(x)$ esetén akkor nyilán $\lambda(|x-y|) = r_+$, ahol r_+ az r-re rákövetkező racionális szám. A 2. Lemma alapján $\lambda(|g_n(x)-g_n(y)|) = (n+1)r_+$. Ezeket figyelembe véve következik, hogy

$$\lambda\left(\left|\frac{g_n(x)-g_n(y)}{x-y}\right|\right) = n+1,$$

ami nyilván azt jelenti, hogy

$$\left|\frac{g_n(x)-g_n(y)}{x-y}\right| < d,\ \forall n > 0,$$

így a baloldal is infinitesszimális, vagyis

$$\forall \varepsilon > 0 : \left|\frac{g_n(x)-g_n(y)}{x-y}\right| < \varepsilon,$$

ahonnan

$$g_n'(x) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in M.$$

Még annyit kell belátni, hogy az $S = \{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ lineárisan független rendszer a M-en. Ezt hasonló képpen végezzük, mint a [3]-beli tétel esetében.

Legyen $j \in \mathbb{N}$ és legyenek $n_1 < n_2 < \ldots < n_j$, $\mathbb{N}$-beli adott számok. Most megmutatjuk, hogy $g_{n_1}, g_{n_2}, \ldots, g_{n_j}$ lineárisan függetlenek a M-en. Tételezzük fel, hogy $c_1 g_{n_1} + c_2 g_{n_2} + \ldots + c_j g_{n_j} = 0$ valamely $c_1, c_2, \ldots, c_j \in \mathcal{R}$ esetén és megmutatjuk, hogy $c_1 = c_2 = \ldots = c_j = 0$. Mivel $c_1 g_{n_1} + c_2 g_{n_2} + \ldots + c_j g_{n_j} = 0$ és $d \in M$ feltétel szerint innen azt kapjuk, hogy $c_1 g_{n_1}(d) + c_2 g_{n_2}(d) + \ldots + c_j g_{n_j}(d) = 0$, vagyis $c_1 d^{n_1} + c_2 d^{n_2} + \ldots + c_j d^{n_j} = 0$. Innen nyilván következtethetünk, hogy $c_1 = c_2 = \ldots = c_j = 0$.

Ezzel a tétel bizonyítása teljes.

■

Látható, hogy az előző tétel általánosítása a [3]-ban bemutatott tételnek. A következőkben megfogalmazunk egy általánosabb tételt.

6. Megjegyzés. *Az előbbi tételben megadott függvénysorozat szerkesztéséből látható, hogy az volt kulcsfontosságú lépés, hogy az* $f : M \longrightarrow \mathcal{R},\ f(x) = x^k$ *függvényt úgy „manipuláljuk" először, hogy a képelemek „legalsó szintjei" visszakerüljenek a megfelelő* x *szintjére, majd ezzel a már ismert szinttel tovább tudunk dolgozni.*

Ez adja az ötletet ennek az általános kivitelezésére, amelyet a következő tételben adunk meg.

8. Tétel. *Legyen* $h : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ *és* $\alpha \in \mathbb{Q}, \alpha > 1$. *Ekkor az*

$$f : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R},\ f(x)[q] = \begin{cases} h(x)\left[\frac{q\lambda(h(x))}{\lambda(x)\alpha}\right], & \text{ha } \lambda(x) \neq 0 \\ \\ h(x)\left[\frac{q+\lambda(h(x))}{\alpha}\right], & \text{ha } \lambda(x) = 0 \end{cases}$$

függvény differenciálható $\forall x \in \mathcal{R}$ *esetén és* $f'(x) = 0,\ \forall x \in \mathcal{R}$.

Bizonyítás:

A bizonyítás gondolatmenete ugyanaz, mint az előző tétel esetében, vagyis ebben az esetben is azt szeretnénk igazolni, hogy az így megszerkesztett függvény megoldása lesz az $y' = 0$ differenciálegyenletnek $\mathcal{R}$-en. Látható, hogy az f függvény szerkesztésében szintén az a kulcsfontosságú lépés, hogy a h függvény által keletkező elemek szintjeit visszavigyük a kiinduló elemek szintjére, így megfelelő képpen tudunk majd dolgozni.

Ekkor $\forall \varepsilon > 0$ esetén legyen $\delta = \min\{\varepsilon^2, d\}$ és legyen $x \in \mathcal{R}$ rögzített és $y \in \mathcal{R} :\ |x - y| < \delta$. Ekkor vizsgáljuk a

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right|$$

kifejezést.

Azt a főesetet vizsgáljuk, amikor $\lambda(x) \neq 0$ és $\lambda(y) \neq 0$.

1. eset: Ha $\lambda(x) \neq \lambda(y)$, akkor nyilván $\lambda(f(x)) \neq \lambda(f(y))$. Innen az következik, hogy

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \sim (x - y)^{\alpha - 1}.$$

Mivel $|x-y|<\delta$, innen következik, hogy $|x-y|^{\alpha-1} << \varepsilon$, mert $\alpha > 1$. Tudva azt, hogy $\forall x \in \mathcal{R}, x > 0$ esetén ha $x \sim \gamma$ és $\gamma > 0$ infinitesszimális, akkor x is infinitesszimális, következtethetünk, hogy

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| < \varepsilon.$$

Figyelembe véve, hogy a fenti összefüggés tetszőleges $\varepsilon > 0$ és x esetén teljesül, innen következik, hogy

$$f'(x) = 0, \ \forall x \in \mathcal{R}.$$

2. eset: Ha $x \sim y$ és $x[\lambda(x)] \neq y[\lambda(y)]$, akkor az előző esethez hasonló gondolatmenet teljesül.

3. eset: Ha $x =_r y$, valamely $r \in \mathbb{Q}, \ r \geq \lambda(x)$ esetén akkor nyilán $\lambda(|x-y|) = r_+$, ahol r_+ az r-re rákövetkező racionális szám. A 2. Lemma alapján $\lambda(|f(x)-f(y)|) = \alpha r_+$. Ezeket figyelembe véve következik, hogy

$$\lambda\left(\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\right) = \alpha,$$

ami nyilván azt jelenti, hogy

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| < d,$$

így a baloldal is infinitesszimális, vagyis

$$\forall \varepsilon > 0 : \ \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| < \varepsilon,$$

ahonnan

$$f'(x) = 0, \ \forall x \in \mathcal{R}.$$

Természetesen, ha $\lambda(x) = 0$ vagy $\lambda(y) = 0$, akkor az f függvényünk értelmezésében a második ágat vesszük figyelembe, de ez semmin se változtat a bizonyításban gondolatmenetében.

Ezek után a bizonyítás teljes.

$\blacksquare$

Belátható, hogy az előző tételben szereplő függvények családja nagy fontossággal bír az $\mathcal{R}$-en értelmezett lineáris közönséges differenciálegyenletek elméletében, ezért érdemes ezen függvénycsalád tulajdonságait vizsgálni.

14. Értelmezés. *Legyen $M \subseteq \mathcal{R}$ és legyen $f : M \longrightarrow \mathcal{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvény $C_0^1(M)$ osztályú, ha deriválható és minden M-beli pontra a deriváltja 0. Vagyis*

$$C_0^1(M) = \{f : M \longrightarrow \mathcal{R} | f \ deriv.\ M - en,\ f'(x) = 0, \forall x \in M\}.$$

15. Értelmezés. *Legyen $M \subseteq \mathcal{R}$ és $f : M \longrightarrow \mathcal{R}$. Ha f-re létezik olyan $h : M \longrightarrow \mathcal{R}$ függvény és $\alpha \in \mathbb{Q}, \alpha > 1$ szám úgy, hogy*

$$f(x)[q] = \begin{cases} h(x) \left[\frac{q\lambda(h(x))}{\lambda(x)\alpha}\right], & ha\ \lambda(x) \neq 0 \\ \\ h(x) \left[\frac{q+\lambda(h(x))}{\alpha}\right], & ha\ \lambda(x) = 0 \end{cases},$$

akkor azt mondjuk, hogy f $(\alpha; h)$-tulajdonságú.

Az összes ilyen függvények családját jelöljük:

$$H_0^1(M) = \left\{ f : M \longrightarrow \mathcal{R} \middle| \exists h : M \longrightarrow \mathcal{R}, \alpha \in \mathbb{Q}, \alpha > 1 : f\ (\alpha; h) - \text{tulajdonságú} \right\}.$$

Látható, hogy az imént bemutatott reprezentációs tételnek jelentős szerepe van abból a szempontból, hogy egy elégséges feltételt biztosít ahhoz, hogy bármely $(\alpha; h)$-tulajdonságú függvény ebből a térből C_0^1 osztályú.

A továbbiakban azt szeretnénk, hogy valamilyen szükséges feltételeket tudjuk biztosítani ahhoz, hogy egy nem analitikus C_0^1 osztályú függvény $(\alpha; h)$-tulajdonságú legyen, valamilyen α-ra és h-ra.

A következőkben lokális feltételeket adunk az előbb megfogalmazott problémára.

9. Tétel. *Legyen $M \subseteq \mathcal{R}$ nyílt és $0 \in M$ és $f \in C_0^1(M)$, valamint $f(0) = 0$. Ha $\forall \varepsilon > 0 :\ \exists \delta_\varepsilon,\ 0 < \delta_\varepsilon < d$ és $\exists \alpha_\varepsilon \in \mathbb{Q}, \alpha_\varepsilon > 1$ úgy, hogy*

$$\frac{\lambda(f(x))}{\lambda(x)} = \alpha_\varepsilon, \forall x \in M,\ |x| < \delta_\varepsilon,$$

akkor f $(\alpha_\varepsilon; f)$-tulajdonságú az $\{x \in M : |x| < \delta_\varepsilon\}$ halmazon.

Bizonyítás:

Mivel $\forall \varepsilon > 0 :\ \exists \delta_\varepsilon,\ 0 < \delta_\varepsilon < d$ és $\exists \alpha_\varepsilon \in \mathbb{Q}, \alpha_\varepsilon > 1$ úgy, hogy $\lambda(f(x)) = \alpha_\varepsilon, \forall x \in M,\ |x| < \delta_\varepsilon$ esetén, jelöljük $W_\varepsilon = \{x \in M : |x| < \delta_\varepsilon\}$.

Legyen a továbbiakban ε és a hozzá tartozó δ_ε rögzítettek.

Mivel $f \in C_0^1(M)$, következik, hogy $f \in C_0^1(W_\varepsilon)$, ez azt jelenti, hogy f deriválható a 0-ban és $f'(0) = 0$.

Ez azt jelenti, hogy

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = \left|\frac{f(x)}{x}\right| < \varepsilon$$

ha $x \in W_\varepsilon$. Itt az általánosság megsértése nélkül feltételezhetjük, hogy az ε és a δ_ε azok, amelyeket rögzítettünk, mert azokra is igaz kell legyen.

Innen azonnal következik, hogy

$$\lambda\left(\left|\frac{f(x)}{x}\right|\right) = \frac{\lambda(f(x))}{\lambda(x)} \geq \lambda(\varepsilon),\ \forall x \in W_\varepsilon.$$

Mivel $x \in W_\varepsilon$, a δ_ε megválasztásából az is következik, hogy

$$\lambda(x) \geq 1. \tag{1}$$

Mivel a tétel kijelentésében ezekhez a rögzített ε és δ_ε-hoz $\frac{\lambda(f(x))}{\lambda(x)} = \alpha_\varepsilon$, felírhatjuk, hogy $\forall x \in W_\varepsilon$:

$$f(x)[q] = f(x)\left[\frac{q\lambda(f(x))}{\lambda(x)}\frac{\lambda(x)}{\lambda(f(x))}\right] = f(x)\left[\frac{q\lambda(f(x))}{\lambda(x)\alpha_\varepsilon}\right],$$

amit igazolni kellett, vagyis f $(\alpha_\varepsilon; f)$-tulajdonságú W_ε-on.

■

7. Megjegyzés. *Az előző tételben nem sértettük meg az általánosságot azzal, hogy a lokális reprezentációban nem szerepel az az eset amikor* $\lambda(x) = 0$, *hiszen a tételbeli (1) összefüggés alapján mindig az következik, hogy* $\lambda(x) \geq 1$ *minden* W_ε *típusú halmaz esetén, ezért ezt az esetet nem kell tárgyalni.*

4. Lineáris differenciálegyenlet rendszerek

Ebben a fejezetben lineáris differenciálegyenlet rendszerek megoldhatóságát vizsgáljuk, valamint a megoldásokat próbáljuk reprezentálni az előző fejezetben bevezetett H_0^1 osztájú függvények segíségével.

Könnyen belátható, hogy akárcsak a valós esetben bármely lineáris rendszer visszavezethető n darab elsőrendű egyenletre. Mátrixos alakban írva:

$$Y'(t) = A(t)Y(t),$$

ahol $Y(t)$ egy n hosszúságú oszlopvektor, $A(t)$ $n\times n$-es mátrix, mindkettő a t-től függ és $\mathcal{R}$-en értelmezett, $\mathcal{R}$ értékű függvényeket tartalmaznak. Látható, hogy a fenti egyenletrendszer nem konstans együtthatós homogén lineáris egyenletekből áll.

10. Tétel. *Tekintsük az*

$$Y'(t) = AY(t)$$

konstans együtthatós lineáris homogén differenciálegyenletekből álló rendszert. Ekkor a rendszer megoldása a következő alakban írható:

$$Y(t) = e^{At}C + e^{At}U_{na}(t),$$

ahol $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathcal{R})$ *konstansokat tartalmazó oszlopvektor, valamint* $U_{na}(t) \in \mathcal{M}_{n,1}(H_0^1)$ H_0^1 *osztályú függvényeket tartalmazó oszlopvektor.*

Bizonyítás:

A rendszerünk a következő alakban írható:

$$Y'(t) - AY(t) = O_{n,1}$$

Beszorzunk bal oldalról az e^{-At} mátrixszal.

$$e^{-At}Y'(t) - e^{-At}AY(t) = O_{n,1} \Longleftrightarrow$$

$$\left(e^{-At}Y(t)\right)' = O_{n,1}$$

Innen

$$e^{-At}Y(t) = C + U_{na}(t),$$

ahol $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathcal{R})$, valamint $U_{na}(t) \in \mathcal{M}_{n,1}(H_0^1)$.

$$\Longrightarrow Y(t) = e^{At}C + e^{At}U_{na}(t),$$

vagyis amit igazolni szerettünk volna.

■

8. Megjegyzés. *Látható, hogy a lineáris konstans együtthatós homogén egyenletrendszerek megoldásai nagyon hasonlítanak a valós esethez, a különbség abban rejlik, ami rámutat ismét arra a többletre, amivel rendelkezik a Levi-Civita test, hogy a klasszikus értelemben vett analitikus megoldások mellett megjelennek valami „furcsa" jellegű függvények, amelyekre próbáltunk reprezentációt adni az előző fejezetben, ezeket neveztük* $(\alpha; h)$*-tulajdonságú függvényeknek.*

Természetes ennek a gondolatnak a továbbvitele, miszerint ilyen jellegű tulajdonság fog teljesülni inhomogén rendszerek esetén is.

De mivel a primitív függvények létezése csak analitikus függvények esetében tárgyalt a Levi-Civita testen([1], 6. Fejezet), ezért azzal az esettel foglalkozunk, amikor az inhomogenitást biztosító tag analitikus.

11. Tétel. *Tekintsük az*

$$Y'(t) = AY(t) + B(t)$$

lineáris inhomogén egyenletekből álló rendszert, ahol $B(t)$ oszlopvektor, amely analitikus függvényeket tartalmaz. Ekkor a rendszer általános megoldása a következő alakban írható:

$$Y(t) = e^{At}C + e^{At}U_{na}(t) + e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-As}B(s)\mathrm{d}s,$$

ahol $U_{na}(t)$ elemei H_0^1 osztĺyú függvények.

Bizonyítás:

A megoldás abban fog állani, hogy konstans variálást hajtunk végre az inhomogénből származtatott homogén rendszerre. Az előző tétel alapján:

$$Y_{ho}(t) = e^{At}C(t) + e^{At}U_{na}(t)$$

A konstans variálásban figyelembe véve, hogy $U'_{na}(t) = O_{n,1}$ azt kapjuk, hogy

$$C'(t) = e^{-At}B(t).$$

Figyelembe véve, hogy e^{-At} és $B(t)$ analitikus függvényeket tartalmaznak, ([1], 6.1 Következmény) alapján a szorzat is analitikus függvényeket fog tartalmazni. Felhasználva a ([1], 6.13 Következmény)-t tudjuk, hogy analitikus függvénynek létezik a primitítvje, ezért felírhatjuk, hogy

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-As}B(s)\mathrm{d}s.$$

Innen felírhatjuk a megoldást, vagyis

$$Y(t) = e^{At}C + e^{At}U_{na}(t) + e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-As}B(s)\mathrm{d}s.$$

Ezzel igazoltuk a tételt.

■

A gondolatmenetünket ismét tovább folytatva hasonlóan vizsgáljuk a nem konstatns együtthatós homogén és inhomogén rendszerek megoldásait.

12. Tétel. *Tekintsük az*

$$Y'(t) = A(t)Y(t)$$

lineáris homogén differenciálegyenletekből álló rendszer úgy, hogy $A(t)$ *olyan* $n \times n$*-es mátrix, mely elemei analitikus függvények. Ekkor a rendszerünk általános megoldásai a következők:*

$$Y(t) = e^{\int_{t_0}^{t} A(s)\mathrm{d}s} C + e^{\int_{t_0}^{t} A(s)\mathrm{d}s} U_{na}(t),$$

ahol $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathcal{R})$*, valamint* $U_{na}(t) \in \mathcal{M}_{n,1}(H_0^1)$*.*

Bizonyítás:

A bizonyítás hasonló módon történik, mint a 10. Tétel esetén, ennek végiggondolását az olvasóra bízzuk.

$\blacksquare$

13. Tétel. *Tekintsük az*

$$Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$$

lineáris inhomogén differenciálegyenletekből álló rendszer úgy, hogy $A(t)$ *olyan* $n \times n$*-es mátrix, mely elemei analitikus függvények, illetve a* $B(t)$ *oszlopvektor elemei szintén analitikusak. Ekkor a rendszerünk általános megoldásai a következők:*

$$Y(t) = e^{\int_{t_0}^{t} A(s)\mathrm{d}s} C + e^{\int_{t_0}^{t} A(s)\mathrm{d}s} U_{na}(t) + e^{\int_{t_0}^{t} A(s)\mathrm{d}s} \int_{t_0}^{t} B(s)\mathrm{d}s,$$

ahol $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathcal{R})$*, valamint* $U_{na}(t) \in \mathcal{M}_{n,1}(H_0^1)$*.*

Bizonyítás:

A bizonyítás hasonló módon történik, mint a 11. Tétel esetén, ennek az átgondolását szintén az olvasóra bízzuk.

$\blacksquare$

9. Megjegyzés. *Megjegyezzük, hogy az előző tételek esetében a rendszerünk értelmeési tartománya mindig valamilyen* $[a, b] \subset \mathcal{R}$ *intervallum, erre nem tértünk ki a tételeink kijelentésében, valamint az együtthatófüggvények és az inhomogenitást biztosító függvények analitikusak, mindegyik saját konvergencia sugarával, de a bizonyításokat ezt nem befolyásolja.*

5. Bessel típusú speciális függvények $\mathcal{R}$-en

Ebben a fejezetben Bessel típusú speciális függvények reprezentációját vizsgáljuk.

Ezen függvények tulajdonságait a következő feladat kapcsán elemezzük:

1. Feladat. *Tekintsük a*

$$t^2y'' + ty' + (t^2 - \nu^2)y = 0$$

differenciálegyenletet. Vizsgáljuk az egyenlet megoldásait a $[-1, 1] \subset \mathcal{R}$ *intervallumon, ahol* $\nu \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

A fenti feladatot ν-indexű Bessel egyenletnek nevezzük. A továbbiakban ezen egyenlet megoldásait próbáljuk vizsgálni.

Mivel másodrendű lineáris homogén egyenletről van szó, amelynek az együtthatói analitikusak, a klasszikus analitikus megoldások biztos

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$$

alakban írhatók, ahol y_1 és y_2 analitikusan $\mathcal{R}$-en.

Könnyen belátható, hivatkozva a valósbeli elméletre, mivel csak a hatványsorokkal való műveleteket kell használni, hogy a

$$J_\nu(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n},$$

illetve

$$J_{-\nu}(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-\nu+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n},$$

függvények megoldásai lesznek a fenti feladatnak, bármely $t \in [-1, 1]$, ahol Γ az Euler féle függvény, sőt a fenti hatánysorok konvergensek az értelmezési tartományuk minden pontjában, kivéve a 0-t.

Azt a következtetést is le lehet vonni egyértelműen, hogy $y_1(t) = J_\nu(t)$ valamint $y_2(t) = J_{-\nu}(t)$, abban az esetben, amikor a ν nem egész. Ebben az esetben a J_ν és $J_{-\nu}$ lineárisan függetlenek lesznek.

De a problémát valójában az jelenti, hogy a klasszikus jellegű megoldások mellé adjunk meg H_0^1 osztályú megoldásokat is és ezek tulajdonságait is vizsgáljuk.

Legyen

$$\begin{cases} w_1 = y \\ w_2 = y' \end{cases}$$

Ekkor a feladatunk alapján a következő rendszert állíthatjuk fel:

$$\begin{cases} w_1' = w_2 \\ w_2' = \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right) w_1 + \frac{1}{t} w_2 \end{cases}$$

Vagy mátrixos alakban

$$W'(t) = A(t)W(t),$$

ahol

$$W(t) = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}; \quad W'(t) = \begin{pmatrix} w_1' \\ w_2' \end{pmatrix}; \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \frac{\nu^2}{t^2} & \frac{1}{t} \end{pmatrix}.$$

Mivel $A(t)$ elemei analitikus függvények, csak 0 körül nem, de ezzel nem sértjük meg az általánosságot, használhatjuk a homogén nem konstans együtthatós rendszerekre vonatkozó reprezentációs tételt a megoldások felírására.

Legyen

$$D(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)\mathrm{d}s = \begin{pmatrix} 0 & t - t_0 \\ t - t_0 + \nu^2(\frac{1}{t} - \frac{1}{t_0}) & \ln\frac{t}{t_0} \end{pmatrix},$$

ahol a ln függvény az exponenciális függvény inverze, és természetesen ez is analitikus.

Ekkor a rendszerünk megoldása a következő alakban írható:

$$W(t) = e^{D(t)}C + e^{D(t)}U_{na}(t)$$

Figyelembe vesszük azt is, hogy az analitikus rész $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ alakú, ezért levonhatjuk azt a következtetést, hogy az $e^{D(t)}$ mátrix első sorában tekinthetjuk a $J_\nu(t)$, valamint a $J_{-\nu}(t)$ függvényeket. Innen helyén van a következő értelmezés, melyben értelmezzük az $\mathcal{R}$-beli Bessel függvényeket.

16. Értelmezés. *Legyenek $\mathcal{J}_\nu, \mathcal{J}_{-\nu} : M \subseteq \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$, függvények úgy, hogy*

$$\mathcal{J}_\nu(t) = J_\nu(t) + J_\nu(t)g_\nu(t),$$

$$\mathcal{J}_{-\nu}(t) = J_{-\nu}(t) + J_{-\nu}(t)g_{-\nu}(t),$$

ahol $\nu \in \mathbb{Q}$ és $g_\nu, g_{-\nu} \in H_0^1(M)$.

A $\mathcal{J}_\nu, \mathcal{J}_{-\nu}$ függvényeket a ν-indexű Bessel egyenlethez tartozó elsőfajú Bessel függvényeknek nevezzük.

5.1. Az $\mathcal{R}$-beli elsőfajú Bessel függvények tulajdonságai

Megfogalmazhatjuk a követkző tételt az $\mathcal{R}$-beli elsőfajú Bessel függvényekre:

14. Tétel. *Használjuk az 1. Feladatban valamint az előző értelmezésben bevezetett jelöléseket. Ekkor*

$$(a)\ \frac{2\nu}{t}\mathcal{J}_\nu(t) = \Big(J_{\nu-1}(t) + J_{\nu+1}(t)\Big)\Big(1 + g_\nu(t)\Big)$$

$$(b)\ 2\mathcal{J}_\nu'(t) = \Big(J_{\nu-1}(t) - J_{\nu+1}(t)\Big)\Big(1 + g_\nu(t)\Big)$$

$\forall t \in M \subset \mathcal{R}$, *ahol* M *olyan, hogy a megfelelő hatványsorok konvergensek minden pontjában.*

Bizonyítás:

$$\left(\frac{J_\nu(t)}{t^\nu}\right)' = \frac{1}{2^\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n-1}}{(n-1)!\Gamma(n+\nu+1)2^{2n-1}} = -\frac{J_{\nu+1}(t)}{t^\nu}$$

Valamint tudjuk, hogy

$$\mathcal{J}_\nu(t) = J_\nu(t) + J_\nu(t)g_\nu(t).$$

Mivel $g_\nu(t) = 0, \forall t \in M$,

$$\left(\frac{\mathcal{J}_\nu(t)}{t^\nu}\right)' = -\frac{J_{\nu+1}(t)}{t^\nu} - \frac{J_{\nu+1}(t)}{t^\nu}g_\nu(t), \tag{1}$$

illetve hasonlóan

$$\frac{1}{t}\Big(t^\nu\mathcal{J}_\nu(t)\Big)' = t^{\nu-1}J_{\nu-1}(t) + t^{\nu-1}J_{\nu-1}(t)g_\nu(t)$$

Ez az összefüggés alapján

$$\frac{1}{t}\Big(\nu t^{\nu-1}\mathcal{J}_\nu(t) + t^\nu\mathcal{J}_\nu'(t)\Big) = t^{\nu-1}J_{\nu-1}(t) + t^{\nu-1}J_{\nu-1}(t)g_\nu(t)$$

$$\mathcal{J}_\nu'(t) = J_{\nu-1}(t) - \frac{\nu}{t}\mathcal{J}_\nu(t) + J_{\nu-1}(t)g_\nu(t) \tag{2}$$

Másfelöl az (1) összefüggést kefejtve azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{J}_\nu'(t)\frac{1}{t^\nu} + \mathcal{J}_\nu(t)\frac{-\nu}{t^{\nu+1}} = -\frac{J_{\nu+1}(t)}{t^\nu} - \frac{J_{\nu+1}(t)}{t^\nu}g_\nu(t),$$

vagyis

$$\mathcal{J}'_\nu(t) = \frac{\nu}{t}\mathcal{J}_\nu(t) - J_{\nu+1}(t) - J_{\nu+1}(t)g_\nu(t) \tag{3}$$

A (2) és (3) összefüggéseket kivonva a tételünk (a) alpontját kapjuk, illetve összeadva a tétel (b) alpontját.

■

10. Megjegyzés. *Látható, hogy az így előállított Bessel függények analitikus részei ugyanolyan tulajdonságokkal rendelkeznek, mint a valós, vagy komplex esetben. Ez a tény is azt igazolja, hogy ha eltekintenénk a nem analitikus részektől, akkor nagy mértékben a klasszikus valós, vagy komplex tulajdonságokhoz hasonlókat kapnánk.*

Az elkövetkezőkben azt szeretnénk, hogy a más, a klasszikus valósbeli, komplexbeli Bessel függvények tulajdonságait terjesszük ki az $\mathcal{R}$ számtestre. Ennek a problémakörnek a nehézsége abban áll, hogy olyan műveletek végrehajtására van szükség, amelyeket nem engedhetünk meg, mint például egy $\mathcal{R}$-beli elem irracionális, komplex hatványa, stb.

Annak érdekében, hogy mégis további eredményeket tudjunk kiterjeszteni, általánosított elsőfajú Bessel függvények tulajdonságait vizsgáljuk. E cél érdekében alapul vesszük a ([8]) művet.

6. Általánosított elsőfajú Bessel függvények $\mathcal{R}$-en

17. Értelmezés. *A*

$$t^2w''(t) + btw(t) + [ct^2 - p^2 + (1-b)p]w(t) = 0$$

differenciálegyenlet összes megoldásait p-edrendű általánosított elsőfajú Bessel függvényeknek nevezzük, ahol $p \in \mathbb{Q}$, $b, c \in \mathbb{R}$, $t \in \mathcal{R}$.

A klasszikus értelemben vett általánosított elsőfajú Bessel függvények osztályának az a nagy előnye, hogy magába foglalja az összes elsőfajú Bessel, módosított Bessel, szférikus Bessel, módosított szférikus Bessel függvényeket, ezért ezen függvényosztály tanulmányozása egyszerre több mindent foglal magába.

18. Értelmezés. *([8]) Az előbbi értelmezésben vett egyenlet egy partikuláris megoldását, a*

$$w_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-c)^n}{n!\Gamma(p+n+\frac{b+1}{2})} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+p}$$

függvényt általánosított elsőfajú Bessel függvénynek nevezzük, ahol $p, b, c, t \in \mathbb{C}$.

Látható, hogy $c = b = 1$ esetén visszakapjuk a hagyományos elsőfajú Bessel függvényt. Látható az is, hogy ez a függvény analitikus, valamint a hatványsor konvergens.

Hasonlóan az 1. Feladat-beli elmélkedésünkhöz megadhatjuk az $\mathcal{R}$-en értelmezett általánosított elsőfajú Bessel függvényt, a következő képpen:

19. Értelmezés. *Legyenek* $p \in \mathbb{Q}, b, c \in \mathbb{R}$ *és* $t \in M \subseteq \mathcal{R}$*. Ekkor a*

$$\mathcal{W}_p(t) = w_p(t) + w_p(t) g_p(t)$$

alakban felírt függvényt p-edrendű általánosított elsőfajú Bessel függvénynek nevezzük M-en, ahol $g_p \in H_0^1(M)$*, valamint*

$$w_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-c)^n}{n!\Gamma(p+n+\frac{b+1}{2})} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+p}.$$

11. Megjegyzés. *Ebben az esetben is levonható az a következtetés, hogy az imént definiált általánosított Bessel függvény egy analitikus részből áll, valamint egy analitikus és egy* $(\alpha; h)$*-tulajdonságú függvény szorzatából. De ezek a függvények a nem általánosítottakhoz képest jóval több függvényt foglalnak magukba, ezért jóval általánosabb függvényosztály.*

A továbbiakban ezen általánosított Bessel függvények tulajdonságait vizsgáljuk.

Hasonlóan a 14. Tételhez, itt is megfogalmazhatunk egy hasonló tételt, $\mathcal{R}$-en értelmezett általánosított Bessel függvények közötti rekúrziós összefüggésekre.

15. Tétel. *Használva a 19. Értelmezésben vett jelöléseket,* $\forall p \in \mathbb{Q}$, $b, c \in \mathbb{R}$, $t \in M \subset \mathcal{R}$ *esetén*

$$(a)\ \frac{2p+b-1}{t}\mathcal{W}_p(t) = \Big(w_{p-1}(t) + c w_{p+1}(t)\Big)\Big(1 + g_p(t)\Big)$$

$$(b)\ (2p+b-1)\mathcal{W}_p'(t) = \Big(p w_{p-1}(t) - (p+b-1) c w_{p+1}(t)\Big)\Big(1 + g_p(t)\Big),$$

ahol M olyan halmaz, hogy miden pontjában a megfelelő hatványsorok konvergensek.

Bizonyítás:

A bizonyítás analóg módon történik, mint a 14. Tétel bizonyítása, illetve a komplex eset igazolása megtalálható ([8], 1.1 Lemma)-ban. Ezért ezek végiggondolását az olvasóra bízzuk. Megjegyzendő itt még az, hogy $b = c = 1$ esetén visszakapjuk a 14. Tételt.

$\blacksquare$

A továbbiakban az lenne a célunk, hogy valamilyen integrálreprezentációt vezessünk le az előbbiekben bevezetett általánosított Bessel függvényekre. Lényegében a ([8] 1.4 Lemma)-t fogjuk általánosítani. De előtte egy pár értelmezést adunk meg, amelyekre szükségünk lesz a továbbiakban.

20. Értelmezés. *Legyen $p \in \mathbb{Q}$, $b, c \in \mathbb{R}$, $t \in M \subset \mathcal{R}$. És legyen*

$$u_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{c}{4}\right)^n t^n}{(k)_n n!}$$

Ekkor a

$$\mathcal{U}_p(t) = u_p(t) + u_p(t) g_p(t)$$

függvényt általánosított „normalizált” p-edrendű elsőfajú Bessel függvénynek nevezzük, ahol $g_p \in H_0^1(M)$, $k = p + \frac{b+1}{2}$, valamint $(k)_n$ a Pochhammer szimbólum, vagyis

$$(k)_n = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n+1)}.$$

12. Megjegyzés. *A előbbi értelmezésben megadott függvény egy másik partikuláris megoldása ax általánosított Bessel egyenletnek.*

A továbbiakban integrálreprezentációt adunk a „normalizált” általánosított Bessel függvényekre.

16. Tétel. *Legyenek $p, q \in \mathbb{Q}$, valamint $b, c \in \mathbb{R}$, $z \in \mathcal{R}$ tetszőlegesek. És legyenek $k_p = 2p + b + 1$, $k_q = 2q + b + 1$. Ha $k_p > k_q > 0$, akkor a következő integrálreprezentáció teljesül:*

$$\mathcal{U}_p(z) = \int_0^1 u_q(zt) \mathrm{d}\mu_{p,q,b}(t) + u_p(z) g_p(z),$$

ahol $t \in \mathbb{R} \subset \mathcal{R}$ és $\mathrm{d}\mu_{p,q,b}(t) = \mu_{p,q,b}(t)\mathrm{d}t$, valamint

$$\mu_{p,q,b}(t) = \frac{t^{k_q - 1}(1-t)^{k_p - k_q - 1}}{B(k_q, k_p - k_q)}$$

mérték a $[0, 1] \subset \mathbb{R} \subset \mathcal{R}$-en, és $B(x, y)$ az Euler féle Beta függvény.

Bizonyítás:

A bizonyítás ötlete ugyanaz, mint a ([8],1.4 Lemma) esetén. Mivel

$$\mathcal{U}_p(t) = u_p(t) + u_p(t)g_p(t),$$

ezért csak a

$$u_p(z) = \int_0^1 u_q(zt)\mathrm{d}\mu_{p,q,b}(t)$$

azonosságot kell igazoljuk.

Az $u_q(zt)$ értelmezését felírva, beszorozva mindkét oldalt

$$t^{q+\frac{b-1}{2}}(1-t)^{p-q-1}$$

kifejezéssel, majd integrálva mindkét oldalt a $[0,1] \subset \mathbb{R} \subset \mathcal{R}$ intervallumon azt kapjuk, hogy

$$\int_0^1 u_q(zt)t^{q+\frac{b-1}{2}}(1-t)^{p-q-1}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k_q)\left(-\frac{c}{4}\right)^n}{\Gamma(k_q+n)} \frac{z^n}{n!} \int_0^1 t^{q+n+\frac{b-1}{2}}(1-t)^{p-q-1}\mathrm{d}t$$

A jobboldali integrál azért létezik, mert az integrálandó kifejezés analitikus, és ezért integrálható függvény.

Mivel

$$\int_0^1 t^{q+n+\frac{b-1}{2}}(1-t)^{p-q-1}\mathrm{d}t = B(k_q+n, k_p-k_q) = \frac{\Gamma(k_q+n)\Gamma(k_p-k_q)}{\Gamma(k_q+n)}$$

Ez azért igaz, mert az integrál valós integrál.

Innen következik, hogy

$$\int_0^1 u_q(zt)t^{q+\frac{b-1}{2}}(1-t)^{p-q-1}\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{\Gamma(k_q+n)\Gamma(k_p-k_q)}{\Gamma(k_q+n)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{c}{4}\right)^n t^n}{(k)_n n!} = \frac{\Gamma(k_q+n)\Gamma(k_p-k_q)}{\Gamma(k_q+n)} u_p(z)$$

Ez viszont azt jelenti, hogy

$$u_p(z) = \frac{\Gamma(k_q+n)}{\Gamma(k_q+n)\Gamma(k_p-k_q)} \int_0^1 u_q(zt)t^{q+\frac{b-1}{2}}(1-t)^{p-q-1}\mathrm{d}t$$

vagyis $u_p(z) = \int_0^1 u_q(zt)\mathrm{d}\mu_{p,q,b}(t)$, amit igazolni szerettünk volna.

■

13. Megjegyzés. *A fenti tétel bizonyításában az integrál reprezentáció esetén az integrálás nyilván a* $[0,1]$ *valós intervallumon történik, de ez természetesen értelmezhető tetszőleges integrálható* $\mathcal{R}$*-beli függvények esetében. Bővebb információk az* $\mathcal{R}$*-beli mérték- és integrálelméletről olvashatók ([5])-ben.*

7. További kutatási lehetőségek. Végszó

Mint láttuk a bevezetett H_0^1 osztályú függvények rengeteg további kutatási lehetőséget biztosítanak a Levi-Civita számtesten értelmezett differenciálegyenletek, illetve ezen a testen értelmezett speciális függvények elméletében.

Konkrét kutatási célt képez az $\mathcal{R}$-en értelmezett általánosított elsőfajú Bessel függvények tulajdonságainak vizsgálata, ezek alkalmazása ezen a testen megfogalmazott problémák esetében.

Elméletünket szeretnénk kiterjeszteni ezen Bessel függvények segítségével olyan nem lineáris differenciálegyenletek, rendszerek megoldhatóságára, megoldásainak vizsgálatára, amelyek tanulmányozhatók klasszikus értelemben Bessel függvények segítségével. Valamint nem lineáris rendszerek analitikus, H_0^1 osztályú megoldásai keresésére.

Természetes az is, hogy a Levi-Civita test nagy alkalmazhatósága miatt fontosak ezek a kutatások. Későbbiekben parciális differenciálegyenletek, illetve Fourier analízis felépítésének tanulmányozását tűzhetjük ki célul.

Hivatkozások

[1] Khodr Mahmoud Shamseddine, *New Elements of Analysis on the Levi-Civita Field*, Dissertation, Michigan State University, (1999)

[2] Khodr Mahmoud Shamseddine, Martin Berz, *Analytical properties of power series on Levi-Civita field*, Annales Mathématiques Blaise Pascal, Vol. 12, No. 2, (2005)

[3] Khodr Mahmoud Shamseddine, *On The Existence and uniqueness of solutions of ordinary differential equations on the Levi-Civita filed*, International Journal of Differential Equations and Applications, Volume 4/4, pp. 375-386, (2002)

[4] M. Berz, G. Hoffstatter, W. Wan, K. Shamseddine, and K. Makino, *COSY INFINITY and its Applications to Nonlinear Dynamics* In M. Berz, C. Bischof, G. Corliss, and A. Griewank, editors, Computational Differentiation: Techniques, Applications, and Tools, pages 363-365, Philadelphia, SIAM, (1996)

[5] Khodr Shamseddine, Martin Berz, *Measure theory and integration on the Levi-Civita filed*, Contemporary Mathematics, Volume 319, (2003)

[6] Martin Berz, *Modern Map Methods in Particle Beam Physics*, Academic Press, San Diego, (1999)

[7] Arnold V.I., *Ordinary Differential Equations*, Springer, (1992)

[8] Árpád Baricz, *Generalized Bessel functions of the first kind, Monograph*, Springer, (2010)