

XI. Erdélyi Tudományos Diákköri Konferencia

Üstökösök mozgásának modellezése a kéttest probléma segítségével

Szerző:

MOSONI BOGLÁRKA

BABES-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR
SZÁMÍTÓGÉPES MATEMATIKA SZAK

Témavezető:

DR. SZENKOVITS FERENC

EGYETEMI DOCENS
BABES-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR
MECHANIKA ÉS CSILLAGÁSZAT

Kolozsvár, 2008. május 23-24.

Tartalomjegyzék

| | |
|---|-----------|
| 1. Üstökösök | 2 |
| 1.1. Általános ismertetés | 2 |
| 2. Megfigyeléstől a modellezésig | 5 |
| 3. A kéttest probléma tanulmányozása | 8 |
| 3.1. Mozgás egyenletek | 8 |
| 3.2. Relatív mozgás egyenletei | 10 |
| 3.3. Az állandók | 11 |
| 4. Egyenletek implementálása | 13 |

1. fejezet

Üstökösök

1.1. Általános ismertetés

Az üstökösök kisebb porból és jégből álló égitestek, amelyek legjobban egy "piszkos hógolyóhoz" hasonlíthatók. Ebbe a néhány kilométer (1 km - 100 km) átmérőjű jégrögbe szilikátpor-részecskék és nagyobb kőzetdarabok ágyazódtak be. Az égi mechanika törvényei szerint kúpszeleteken keringenek a Nap, illetve más csillagok körül. Az üstököspályákra a bolygók és kisbolygók pályáival szemben jellemző a nagy excentricitás¹. Mivel közben közelednek a perihéliumhoz², az óriásbolygók pályáikat perturbálják, ezért jellemezhető csak megközelítőleg parabolapályával az üstököspálya. Az üstökösök 60-70%-a az, amely parabolapályán mozog. A többi ellipszis, ritkább esetben hiperbolapályát követ. Előfordulhat az is, hogy egy ideig parabolapályán mozog egy üstökös, aztán "meggondolja magát" (különböző gravitációs erők hatására) és áttér ellipszis pályára, vagy akár fodítva. Nyugodtan mondhatjuk, hogy az üstökösök általában a Naprendszerhez tartoznak, de az elszenvedett perturbációk³ hatására egy részük elhagyhatja a Naprendszert. Az üstökösöket keringési idejük szerint két kategóriába sorolhatjuk. Hosszú periódusú üstökösök, melyek keringési ideje meghaladja a 200 évet, ez idő legnagyobb részében a

¹excentricitás - központkivüliség, egy égitest pályájának elnyúltsága. Értéke egyenlő az ellipszis centrumának és az egyik fókuszpont távolságának, valamint az ellipszis fél nagytengelyének a hányadosával.

²perihélium - égitest pályájának a központi csillaghoz legközelebb eső pontja.

³perturbáció - pályaháborgás, a bolygók, üstökösök mozgásában más égitestek gravitációjának következtében jelentkező zavaró hatás

bolygópályákon kívül tartózkodnak, pályasíkjaik és a Naprendszer szimmetriasíkja között semmiféle összefüggés nincs, pályájuk excentricitása nagyon közel van az 1-hez. A másik csoportba a rövid periódusú üstökösök tartoznak, melyek keringési ideje 200 évnél kevesebb, pályasíkjaik illeszkednek a Naprendszer szimmetriasíkjához, pályájuk excentricitása 0,2 - 0,7 közé esik.

Mikor az üstökösöket felfedezik, csupán halvány fényfoltok, lényegesen kisebbek mint a telihold. Amint a nagyobb üstökösök megközelítik a Napot, fokozatosan fényes csóvát "eresztenek", amely a ködös középponti testtől óriási távolságokig nyúlhat. A szabad szemmel is fényesnek tűnő üstökös ugyan ritka, évente mégis átlagosan 20-30 üstökösöt szoktak felfedezni. Egyes csillagászok vélekedése szerint a friss üstökösök időről időre a hatalmas úgynevezett Oort-féle felhőkből kerülnek a belső Naprendszerbe. A felhő 40-50 ezer CSE-nyire⁴ van a Naptól és többszáz milliárd potenciális üstökösöt foglal magába. Mikor az üstökös még ebben a felhőben jár, egyetlen szilárd halmazállapotú testből, azaz a magból áll. Az üstökösök az óriásbolygókon túl találhatóak, és egy hatalmas felhő formájában veszik körül a Naprendszert. Életük nagyrészt ebben az üstökösfelhőben töltik, ekkor halvány, inaktív égitestekként keringenek a Nap körül. Ilyenkor a kométa csak a Nap fényét tükrözi vissza, a Földről rendszerint szabad szemmel nem is látható. Az üstökösök szén, szilikát és egyéb szilárd szemcsékből áll, melyeket nagy mennyiségben jelenlévő fagyott gázok ragasztanak össze, főleg vízjég, ammónia, metán, széndioxid, szénmonoxid. A mag tömege igen kicsi, $10^{13} - 10^{17}$ kg között van, átmérője pedig 1 - 100 km között változhat.

Az üstökösök csak akkor válnak feltűnővé, és nyerik el közismert megjelenésüket, amikor 3 CSE távolságon belül megközelítik a Napot, a napsugárzás és meleg hatására elpárolgó gázokat a kis tömegű mag, mivel nincs számottevő gravitációs tere, nem képes megtartani, így azok folyamatosan kiáramlanak a bolygóközi térbe. Van azonban egy részük, amely légkör formájában körülveszi a magot, egy nagyméretű gázburkot alkotva, melyet kómának vagy fejnek nevezünk. Az egyre erősödő napsugárzás hatására az üstökös

⁴CSE = csillagászati egység, 1984-ben bevezetett 1976-os IAU-konstansok rendszerének meghatározása szerint egyenlő annak a körpályának a sugarával, melyen egy elhanyagolható tömegű részecske $T = 2\pi/k$ idő alatt tesz meg egy fordulatot a Nap gravitációs hatására a Nap körül, ahol $k = 0,017220209895$ a Gauss-féle gravitációs állandó

kómáját alkotó gázmolekulák szétesnek egyszerűbb gázmolekulákra, ezért térfogata igen gyorsan növekszik. Ezen felszabaduló gázmolekulák és részecskék adják az üstökös fényét. Nemcsak a gázok gerjesztett fényét, hanem a magból kiszabadult részecskék reflexiós fényét is lehet észlelni. A kóma nagysága függ az üstökös gáztartalékaitól és a Naptól való távolságtól. Sűrűsége roppant kicsi - 10000 - 1000000 részecske/cm³-, mérete viszont elérheti az egymillió kilométert is. Egy fényesebb üstökös magja másodpercenként akár 100 tonna anyagot is veszíthet, melynek egy része a kométa körül marad, míg a többi a bolygóközbe távozik. Mivel ekkora egy üstökös tömegvesztése, a teljes széteszlása előtt csak néhány ezer napközeli átmenetet élhet túl.

2. fejezet

Megfigyeléstől a modellezésig

Csillagászatban a pályaszámítás akkor kerül előtérbe, mikor egy újabb égitestet fedeznek fel. Nagy üstökösök esetén a pályát a Nap és Jupiter gravitációs vonzása határozza meg, míg kisebbek esetén a mozgást még nagy mértékben befolyásoló bolygó lehet a Saturnusz és az Uránusz. Így egy igen bonyolult görbét kell meghatározni. Ezt a pályát ha csak egy rövidebb, néhány hónapos időtartamra is, de jól közelíthetjük egy perturbálatlan Kepler-féle pályával. Az üstökösök által leírt pálya nem teljesen illeszkedik egy Kepler-féle görbére, ezért nem is tudunk pontos pályaeqnyenletet megadni. Közelítjük ezt úgy, hogy először a lehető legkevesebb megfigyelébből egy közelítő pályát határozzunk meg. Mivel a pályát hat független adat (hat pályaelem) jellemzi, ezért három megfigyelés az amely elég adatot tud szolgáltatni. Egy megfigyelésből kapunk két független pályaelemet, a rektaszcenziót és deklinációt. Az így kapott pályát korrigálandó, még több megfigyelést végzünk úgy, hogy a legjobban illeszkedő pályát kapjuk. A pályaszámításra a jólismert Gauss-módszert¹ használjuk.

Legyen az ismeretlen pályán mozgó kisbolygó helyvektora az $Nxyz$ heliocentrikus ekvatoriális koordináta-rendszerben (az xy sík az ekvátor síkja, az x tengely a tavaszpont felé mutat) $r(x, y, z)$, az $Fxyz$ geocentrikus ekvatoriális koordinátarendszerben

$$\rho(\rho \cos \alpha \cos \delta, \rho \sin \alpha \cos \delta, \rho \sin \delta),$$

¹Carl Friedrich Gauss(1777-1855) német matematikus, természettudós. Csodagyerek. Tinédzser volt, mikor első áttörő matematikai felfedezéseit elérte. 24 évesen fejezte be fő művét, a Disquisitiones Arithmeticae-t. Id.még: http://hu.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss#.C3.89lete_fiatalkora

ahol ρ a távolság, α a rektaszcenzió, δ deklináció, a Nap geocentrikus helyvektora F_{xyz} -ben $R(X, Y, Z)$! Bármely időpontra fennáll a

$$\vec{\rho} = \vec{r} + \vec{R} \quad (2.1)$$

vektoregyenlet. Komponensekben kiírva

$$\begin{aligned} \rho \cos \alpha \cos \delta &= x + X, \\ \rho \sin \alpha \cos \delta &= y + Y, \\ \rho \sin \delta &= z + Z \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ezekben az egyenletekben ismeretlen a g távolság és az ρ x , y , z koordinátákon keresztül a hat pályaelem. Az α rektaszcenziót és δ deklinációt a megfigyelések szolgáltatják. A Nap X , Y , Z geocentrikus ekvatoriális derékszögű koordinátáit a Föld mozgáselmélete alapján a csillagászati évkönyvek megadják.

A pontos számításokban figyelembe veszik, hogy a Föld nem pontszerű, így a felszínén elhelyezkedő megfigyelő kissé más irányban látja a kisbolygót, mint az a Föld középpontjából látszana. A topocentrikus és geocentrikus megfigyelések különbözőségét az (3.1) jobb oldalához adott $\vec{R}_M(X_M, Y_M, Z_M)$ korrekcióval lehet figyelembe venni, ahol \vec{R}_M a megfigyelő helyvektora F_{xyz} -ben. \vec{R}_M koordinátái a következő összefüggésekből számíthatók ki:

$$\begin{aligned} X_M &= \sin p_n R_M \cos s \cos \varphi, \\ Y_M &= \sin p_n R_M \sin s \cos \varphi, \\ Z_M &= \sin p_n R_M \sin \varphi, \end{aligned} \quad (2.3)$$

ahol $p_n = 8''794$ a Nap ekvatoriális horizontális parallaxisa, R a megfigyelő geocentrikus távolsága a Föld egyenlítői sugarával kifejezve, s a megfigyelés helyi csillagideje, φ a megfigyelő földrajzi szélessége. (3.3) a megfigyelő koordinátáit csillagászati egységben kifejezve adja.

Látható, hogy (3.2)-t három megfigyelésre felírva kilenc egyenletet kapunk kilenc ismeretlennel. Az ismeretlenek: a három δ távolság és a hat pályaelem. A pályaelemek ebből a kilencismeretlenes egyenletrendszerből határozhatók meg, ha teljesülnek a megoldhatóság feltételei. Az is látható, hogy ha a δ távolságokat ismernénk, (3.2)-t elegendő lenne két megfigyelésre felírni. Az ekkor adódó hat egyenletben csak a hat

pályaelem lenne ismeretlen, ahonnan azok meghatározhatók. Innen adódik az az ötlet, hogy a távolságok meghatározását célszerű különválasztani a pályaelemek kiszámításától. Ennek megfelelően a három megfigyelésből történő közelítő pálya meghatározásának két fő része: a távolságok meghatározása, majd a pályaelemek kiszámítása.

Tegyük fel, hogy a három megfigyelést a $t_1 < t_0 < t_2$ időpontokban végeztük! A t_i időponthoz tartozó mennyiségeket jelöljük i index-el ($i = 0, 1, 2$). Írjuk fel (3.1)-et a t_1 , t_0 , t_2 időpontokra:

$$\begin{aligned}\vec{\rho}_1 &= \vec{r}_1 + \vec{R}_1, \\ \vec{\rho}_0 &= \vec{r}_0 + \vec{R}_0, \\ \vec{\rho}_2 &= \vec{r}_2 + \vec{R}_2.\end{aligned}\tag{2.4}$$

A ρ_1, ρ_0, ρ_2 távolságok meghatározásához küszöböljük ki (3.4)-ből az $\vec{r}_1, \vec{r}_0, \vec{r}_2$ vektorokat! Mivel a kisbolygó a feltevés szerint Kepler-féle mozgást végez, az $\vec{r}_1, \vec{r}_0, \vec{r}_2$ vektorok egy síkban vannak. Feltéve, hogy ezek mind különbözők (ami ésszerű feltevés), közülük bármelyik, pl. \vec{r}_0 kifejezhető a másik kettő lineáris kombinációjaként:

$$\vec{r}_0 = n_1 \vec{r}_1 + n_2 \vec{r}_2.\tag{2.5}$$

Az (3.5) összefüggés dinamikai megfontolás alapján is levezethető. A Kepler-mozgást végző kisbolygó $\vec{r}(t)$ helyvektora ugyanis kielégíti az egycentrum-probléma

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r}\tag{2.6}$$

mozgásegyenletét. A pályaszámítás céljára vezessük le ennek az idő hatványai szerint haladó hatványsor alakú megoldását! A Nap-kisbolygó kéttest-probléma esetén a $\mu = k^2(m_1 + m_2)$ összefüggésből a kisbolygó m_2 tömegének elhanyagolásával, és a Nap m_1 tömegét 1-nek választva kapjuk, hogy $\mu = k^2$.

3. fejezet

A kéttest probléma tanulmányozása

A kéttest probléma: Két pontszerűnek tekintett test, jelen esetben az üstökös és egy nagyobb bolygó, csillag (Nap) mozgásának meghatározása, ha rájuk csak a Newton-féle kölcsönös gravitációs vonzóerő hat.

3.1. Mozgás egyenletek

Az $Oxyz$ inerciarendszerben jelöljük P_1 -gyel a csillagot (Napot) és P_2 -vel az megfigyelt üstököst, melyeknek tömege m_1 illetve m_2 , helyzetvektoraik, pedig rendre $\vec{r}_1 = O\vec{P}_1$ és $\vec{r}_2 = O\vec{P}_2$. Mint már a kéttest probléma megfogalmazásában már említettem a két pontszerűnek tekintett testre csak a Newton-féle gravitációs erő hat, melyet \vec{F}_1 -vel illetve \vec{F}_2 -gyel jelölünk. Nagyságuk:

$$\|\vec{F}_1\| := F_1 = k^2 \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

ahol k a Gauss-féle tömegvonzási állandó (arány), valamint

$$r = \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \quad \vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i), \quad i = 1, 2$$

A két erő közti összefüggés, pedig: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Ezen jelölésekkel felírva Newton második törvényét¹ megkapjuk a kéttest probléma mozgásegyenletei:

$$m_i \cdot \vec{a}_i = F_i, \quad \vec{a}_i = \ddot{\vec{r}}_i, \quad i = 1, 2.$$

¹Newton II. törvénye - Egy pontszerű test a gyorsulása egyenesen arányos a testre ható, a gyorsulással azonos irányú F erővel, és fordítottan arányos a test m tömegével.

A gravitációs erőket behejelyettesítve és a gyorsulást a helyzetvektorok segítségével felírva, kapjuk:

$$m_1 \cdot \ddot{\vec{r}}_1 = k^2 \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (3.1)$$

illetve

$$m_2 \cdot \ddot{\vec{r}}_2 = -k^2 \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (3.2)$$

A tengelyekre levetítve kapunk hat (3n) darab másodrendű differenciál-egyenletet, ami tizenkét (6n) elsőrendű differenciál-egyenletet jelent. A megoldásokat az első integrálok segítségével keressük, melyekből tízet ismerünk: tömegközépponti integrál (hat darab), impulzumomentum integrál (három darab) és energia integrál (egy darab).

1. A tömegközéppont-integrálok:

A (3.1) és a (3.2) összeadva, majd a kapott egyenletet idő szerint kétszer deriválva kapjuk:

$$m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 = \vec{a}, \quad m_1 r_1 + m_2 r_2 = \vec{a}t + \vec{b}, \quad (3.3)$$

ahol \vec{a} és \vec{b} konstans vektorok. Az \vec{a} az összipulzus. A rendszer tömegközéppontjának az \vec{r}_C helyzetvektora

$$\vec{r}_C = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.4)$$

Az egyenlet a (3.3) képlet alapján:

$$(m_1 + m_2) \dot{\vec{r}}_C = \vec{a}, \quad (m_1 + m_2) \vec{r}_C = \vec{a}t + \vec{b} \quad (3.5)$$

alakban írható, melyből $\ddot{\vec{r}}_C = 0$, azaz P_C tömegpont nyugalomban van, ellenkező esetben pedig egyenesvonalú egyenletes mozgást végez vagy nyugalomban van (ha $a = 0$), amit a tömegpont megmaradásának tétele is kimond.

A (3.3), illetve a vele ekvivalens (3.5) egyenleteket, melyek a tömegközéppont-integrálok, komponenseikben felírva a P_1 és P_2 mozgásegyenletrinek hat első integrálját kapjuk.

2. Az impulzumomentum-integrál:

A (3.1) egyenletet \vec{r}_1 -ral és a (3.2) egyenletet pedig \vec{r}_2 -ral vektoriálisan megszorozva, majd ezeket összeadva kapjuk, hogy:

$$\vec{r}_1 \times m_1 \dot{\vec{r}}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \dot{\vec{r}}_2 = \vec{0}$$

Ezt az egyenletet idő szerint integrálva írható:

$$\vec{r}_1 \times m_1 \dot{\vec{r}}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \dot{\vec{r}}_2 = \vec{c}, \quad (3.6)$$

ahol \vec{c} egy konstans vektor, a rendszer impulzuszómomentuma. A (3.6) pedig az impulzuszómomentum-integrál, melyet komponensekben felírva a mozgásegyenletek három újabb első integrálját kapjuk.

3. Az energia-integrál:

A (3.1)-et $\dot{\vec{r}}_1$ -tal, a (3.2)-öt pedig $\dot{\vec{r}}_2$ -tal skalárisan beszorozva, majd a kapott egyenleteket összeadva kapjuk, hogy:

$$\ddot{\vec{r}}_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 \dot{\vec{r}}_2 = k^2 \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} (\dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2) = -k^2 \frac{m_1 m_2}{r^3} \dot{\vec{r}} \vec{r}.$$

Ha mindkét oldalt idő szerint integráljuk, megkapjuk az energia-integrált

$$\frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2 = k^2 \frac{m_1 m_2}{r} + H, \quad (3.7)$$

ahol H konstans. Az egyenlet bal oldalán a rendszer kinetikus energiája áll, $-k^2 m_1 m_2 / r$ a potenciális energia, míg a H konstans az energiaállandó. Ezen egyenlettel megvan a mozgásegyenletek tizedik első integrálja, ezek a klasszikus első integrálok.

3.2. Relatív mozgás egyenletei

A relatív mozgás tanulmányozásának megkönnyítésére felvesszünk egy C kezdőpontú inerciarendszert, melyben a P_2 -nek a P_1 -re vonatkoztatott relatív mozgását vizsgáljuk. Bevezetve a $\vec{s}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_C$ valamint $\vec{s}_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_C$, majd idő szerint kétszer deriválva kapjuk, hogy: $\ddot{\vec{s}}_1 = \ddot{\vec{r}}_1$ illetve $\ddot{\vec{s}}_2 = \ddot{\vec{r}}_2$. Ekkor a mozgásegyenleteket

$$m_1 \cdot \ddot{\vec{s}}_1 = k^2 \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (3.8)$$

$$m_2 \cdot \ddot{\vec{s}}_2 = -k^2 \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (3.9)$$

alakban írhatóak. Mivel $\vec{r}_C = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ írhatjuk, hogy

$$\vec{s}_1 = \vec{r}_1 - \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_1 - m_1 \vec{r}_1 - m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = -\frac{m_2 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{m_1 + m_2}.$$

Analóg módon

$$\vec{s}_2 = \frac{m_1 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{m_1 + m_2}.$$

Azaz:

$$\vec{s}_1 = -\frac{m_2 \cdot \vec{r}}{m_1 + m_2}, \quad \vec{s}_2 = \frac{m_1 \cdot \vec{r}}{m_1 + m_2} \quad (3.10)$$

A kapott egyenleteket kétszer idő szerint deriválva $\ddot{s}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\ddot{\vec{r}}$, amit a (3.8) egyenletbe helyettesítve:

$$-\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}} = k^2 \frac{m_1 \cdot m_2}{r^3} \vec{r}$$

$(m_1 \cdot m_2)$ -vel egyszerűsítve felírhatjuk a tömegpont körüli mozgást leíró

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \quad (3.11)$$

mozgásegyenletet, ahol $\mu = k^2(m_1 + m_2)$.

A relatív mozgást leíró (3.11) egyenletet idő szerint egyszer deriválva kapjuk, hogy bármely $\vec{r} : [t_0, t_v] \mapsto \mathfrak{R}^3$ megoldás esetén $\exists \vec{c}$ állandó vektor úgy, hogy

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{c}. \quad (3.12)$$

A \vec{c} állandó vektor értéke $\vec{0}$, akkor az üstökös (P_2) egyenes mentén mozog, azaz $\exists \lambda \in \mathfrak{R}$ úgy, hogy $\vec{r} = \lambda \cdot \vec{v}$, ami azt jelenti, hogy $\vec{r} \parallel \vec{v}$. Ellenkező esetben, mikor a $\vec{c} \neq \vec{0}$ a mozgás síkban történik, melynek egyenlete $x_1 c_1 + x_2 c_2 + x_3 c_3 = 0$, ahol $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Valóban, hisz (3.12) beszorozva skalárisan \vec{r} -rel, kapjuk: $\vec{r} \cdot \vec{c} = \vec{0}$, ami a mozgás síkját adja.

A relatív mozgásegyenlet egy következménye még Kepler általánosított törvénye, mely szerint P_2 -nek P_1 körüli mozgása során a vezérsugar által sűrolt terület-területváltozás egy bizonyos iránytól kiindulva arányos az idővel.

3.3. Az állandók

Az előzőekben már láttuk, hogy léteznek olyan, a két testre vonatkozó összefüggések, melyek a mozgás teljes időtartama alatt állandó értéket adnak. Ilyen például abszolút mozgás esetén az impulzusmomentum integrál, energia integrál, relatív mozgás esetén pedig a Laplace integrál és szintén az energia integrál. Az abszolút mozgás impulzusmomentum integráljának és energia integráljának levezetését már fennebb láttuk az első integrálok kapcsán, ezért csak kijelentem az összefüggéseket:

impulzusmomentum integrál:

$$\vec{r}_1 \times m_1 \dot{\vec{r}}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \dot{\vec{r}}_2 = \vec{c}, \quad (3.13)$$

ahol \vec{c} állandó,

energia integrál:

$$T + V = H, \quad (3.14)$$

ahol $T = \frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}{2}$, $V = -U = -k^2 \frac{m_1 m_2}{r}$, H pedig az energia állandó.

A relatív mozgást leíró (3.11) egyenlet bármely megoldása esetén szintén $\exists H \in \mathfrak{R}$ energia állandó úgy, hogy

$$\frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^2 - \frac{\mu}{r} = H, \quad (3.15)$$

ahol \vec{r} és $\dot{\vec{r}}$ azonos irányúak. A (3.15) egyenletet kapjuk, ha (3.11)-et skalárisa megszorozzuk $\dot{\vec{r}}$, majd idő szerint deriváljuk:

$$\dot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \Rightarrow \dot{\vec{r}} \dot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \dot{\vec{r}} \dot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^2} \dot{r} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^2 \right) = \frac{d(\frac{\mu}{r})}{dr} \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^2 \right) - \frac{d(\frac{\mu}{r})}{dt} = 0,$$

azaz $\exists H$ úgy, hogy (3.15) egyenlet igaz legyen.

Induljunk ki szintén a (3.11) relatív mozgásegyenletből. Először szorozzunk be $\vec{c} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ vektorral, majd a kapott egyenletet deriváljuk egyszer idő szerint:

$$\dot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} \Rightarrow \dot{\vec{r}} \times \vec{c} = -\frac{\mu}{r^3} (\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})) \Rightarrow \dot{\vec{r}} \times \vec{c} = -\frac{\mu}{r^3} ((\dot{\vec{r}} \dot{\vec{r}}) \vec{r} - r^2 \dot{\vec{r}}) \Rightarrow \dot{\vec{r}} \times \vec{c} = -\frac{\mu}{r^2} \dot{\vec{r}} \vec{r} + \frac{\mu}{r} \dot{\vec{r}}$$

Tudva, hogy $\frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \times \vec{c}) = \ddot{\vec{r}} \times \vec{c} + \vec{0}$ ezért írhatjuk:

$$\frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \times \vec{c}) = \frac{d(\frac{\mu}{r})}{dr} \frac{dr}{dt} \vec{r} + \frac{\mu}{r} \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \times \vec{c}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu}{r} \vec{r} \right) \Rightarrow \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \times \vec{c} - \frac{\mu}{r} \vec{r}) = \vec{0},$$

ami azt jelenti, hogy $\exists \vec{\lambda}$ állandó vektor úgy, hogy

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{c} - \frac{\mu}{r} \vec{r} = \vec{\lambda}. \quad (3.16)$$

A kapott integrál Laplace integrálnak nevezzük, a λ pedig a Laplace állandó.

A bemutatott állandóknak fontos szerepük van a pályaszámításban, hiszen ezek szolgálnak a számítások ellenőrzésére, mivel a mozgás teljes idejére alatt értékük nem változik.

4. fejezet

Egyenletek implementálása

A mozgás modellezéséhez szükség van a Cauchy-feladat (kezdetérték feladat) megfogalmazására, azaz mi a csillag és üstökös "indulási" koordinátája. A következő jelölésekkel megadott kezdeti feltételek esetén $\vec{r}_1(t = t_0) = \vec{r}_{1_0}$, $\vec{r}_2(t = t_0) = \vec{r}_{2_0}$ ($\dot{\vec{r}}_1 = \vec{v}_{1_0}$, $\dot{\vec{r}}_2 = \vec{v}_{2_0}$, $\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{v}_{1_0}$, $\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{v}_{2_0}$) a megoldások $r_1, r_2 : [t_0, t_v] \mapsto \mathfrak{R}^3$ meghatározása ezek folytonos megfigyelésével történik.

Tekintsük az

$$L = T - V \quad (4.1)$$

Lagrange függvényt, ahol

$$T = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) = \frac{1}{2}(m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2))$$

valamint

$$V = -U = -G \frac{m_1 m_2}{r}, \quad r = \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ahol G a Gauss féle gravitációs együttható. Behelyettesítve a (4.1) egyenletbe kapjuk:

$$L = \frac{1}{2}(m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2)) + G \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (4.2)$$

Bevezetve a következő jelöléseket, melyekre szükség lesz a kanonikus egyenletek felírásánál:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} := p_{x_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} := p_{y_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} := p_{z_i}, \quad i = 1, 2,$$

majd a számításokat elvégezve:

$$p_{x_1} = \frac{1}{m_1} \dot{x}_1, \quad p_{x_2} = \frac{1}{m_2} \dot{x}_2, \quad p_{y_1} = \frac{1}{m_1} \dot{y}_1, \quad p_{y_2} = \frac{1}{m_2} \dot{y}_2, \quad p_{z_1} = \frac{1}{m_1} \dot{z}_1, \quad p_{z_2} = \frac{1}{m_2} \dot{z}_2 \quad (4.3)$$

összefüggéseket kapjuk.

Mivel a rendszer konzervatív a Hamilton függvény $H = T + V$ alakban írható, mely egyben az energiaállandó is. Behelyettesítve a mozgási energiát és a potenciális energiát kapjuk:

$$H = \frac{1}{2}(m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2)) - G \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (4.4)$$

A (4.3)-as jelöléseket használva a (4.5) egyenlet tovább írható

$$H = \frac{1}{2m_1}(p_{x_1}^2 + p_{y_1}^2 + p_{z_1}^2) + \frac{1}{2m_2}(p_{x_2}^2 + p_{y_2}^2 + p_{z_2}^2) - G \frac{m_1 m_2}{r} \quad (4.5)$$

alakban. Ekkor felírhatóak a kanonikus egyenletek, melyek általános alakja:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

A kéttest probléma esetében ezek a következő képpen alakulnak:

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{G m_1 m_2}{r} \right) = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x_1} = -\frac{G m_1 m_2 (x_2 - x_1)}{r^3}.$$

Analóg módon felírható:

$$\frac{\partial H}{\partial x_2} = \frac{G m_1 m_2 (x_2 - x_1)}{r^3}$$

$$\frac{\partial H}{\partial y_1} = -\frac{G m_1 m_2 (y_2 - y_1)}{r^3}$$

$$\frac{\partial H}{\partial y_2} = \frac{G m_1 m_2 (y_2 - y_1)}{r^3}$$

$$\frac{\partial H}{\partial z_1} = -\frac{G m_1 m_2 (z_2 - z_1)}{r^3}$$

$$\frac{\partial H}{\partial z_2} = \frac{G m_1 m_2 (z_2 - z_1)}{r^3}.$$

Továbbá:

$$\frac{\partial H}{\partial p_{x_1}} = \frac{1}{m_1} p_{x_1}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_{x_2}} = \frac{1}{m_2} p_{x_2}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_{y_1}} = \frac{1}{m_1} p_{y_1}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_{y_2}} = \frac{1}{m_2} p_{y_2}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_{z_1}} = \frac{1}{m_1} p_{z_1}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_{z_2}} = \frac{1}{m_2} p_{z_2}.$$

Tehát a kanonikus egyenletek:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \frac{1}{m_1} p_{x_1}, & \dot{x}_2 &= \frac{1}{m_2} p_{x_2} \\
 \dot{y}_1 &= \frac{1}{m_1} p_{y_1}, & \dot{y}_2 &= \frac{1}{m_2} p_{y_2} \\
 \dot{z}_1 &= \frac{1}{m_1} p_{z_1}, & \dot{z}_2 &= \frac{1}{m_2} p_{z_2} \\
 \dot{p}_{x_1} &= \frac{G m_1 m_2 (x_2 - x_1)}{r^3}, & \dot{p}_{x_2} &= -\frac{G m_1 m_2 (x_2 - x_1)}{r^3} \\
 \dot{p}_{y_1} &= \frac{G m_1 m_2 (y_2 - y_1)}{r^3}, & \dot{p}_{y_2} &= -\frac{G m_1 m_2 (y_2 - y_1)}{r^3} \\
 \dot{p}_{z_1} &= \frac{G m_1 m_2 (z_2 - z_1)}{r^3}, & \dot{p}_{z_2} &= -\frac{G m_1 m_2 (z_2 - z_1)}{r^3}.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

A fenti egyenletek levezetése a Matlabban való implementáláshoz volt szükséges. Sorra a $x_i, y_i, z_i, p_{x_i}, p_{y_i}, p_{z_i}$ az y vektor elemei lesznek,

```

function dy=ketestest(t,y,param);
m1=param(1);
m2=param(2);
G=param(3);
r=sqrt((y(4)-y(1))^2+(y(5)-y(2))^2+(y(6)-y(3))^2);
r3=r^3;
dy=zeros(8,1);
dy(1)=y(7)/m1;
dy(2)=y(8)/m1;
dy(3)=y(9)/m1;
dy(4)=y(10)/m2;
dy(5)=y(11)/m2;
dy(6)=y(12)/m2;
dy(7)=(G*m1*m2*(y(4)-y(1)))/r3;
dy(8)=(G*m1*m2*(y(5)-y(2)))/r3;
dy(9)=(G*m1*m2*(y(6)-y(3)))/r3;
dy(10)=-(G*m1*m2*(y(4)-y(1)))/r3;
dy(11)=-(G*m1*m2*(y(5)-y(2)))/r3;
dy(12)=-(G*m1*m2*(y(6)-y(3)))/r3;

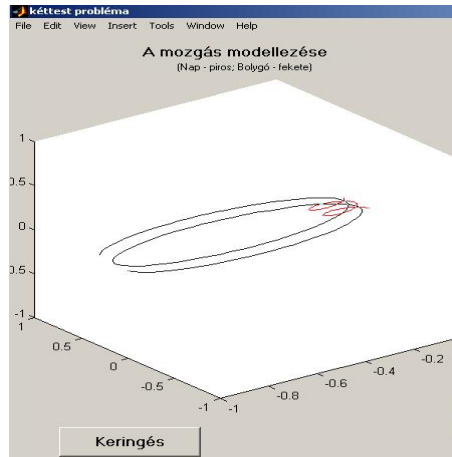
```

1. ábra A kanonikus egyenletek implementálása

amiket az ode45 függvény ($[T, Y] = \text{ode45}(@ketestest, [tk \text{ tv}], \text{kezdfelt}, [], \text{param});$) segítségével integrálom, ami az $y' = f(t, y)$ differenciál egyenletet integrálja tk -tól tv -ig mikor a kezdeti feltételek $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, p_{x_1}, p_{y_1}, p_{z_1}, p_{x_2}, p_{y_2}, p_{z_2}$, míg a param vektorban megadom a G Gauss-féle gravitációs állandót, az m_1, m_2 tömegeket. Az integrálás eredményeképp megkapjuk az Y -ban az integrálás eredményét minden változóra. Ekkor már csak az ábrázolás van hátra. Három dimenzióban a következő kezdeti értékekre

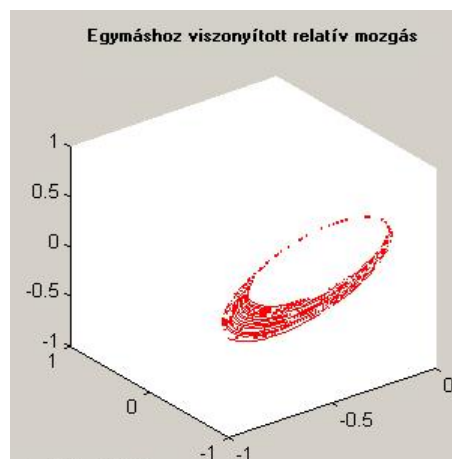
$$m_1 = 6; m_2 = 1; \vec{r}_1 = (0, 0, 0); \vec{r}_2 = (-1, 0, 0); p_{r_1} = (0, 2, 0); p_{r_2} = (0, 2, 0); G = 1$$

a következő pályát kapjuk:



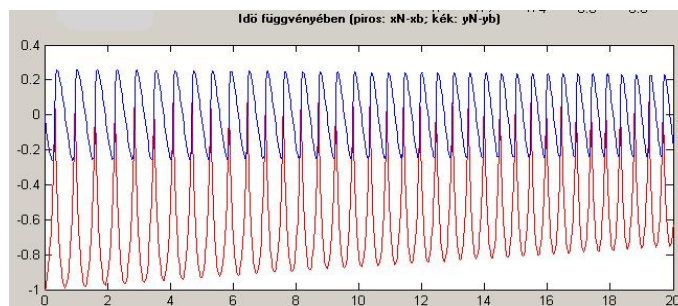
2. ábra Egy nagyobb üstökös keringése egy kisebb csillag körül

Relatív mozgás esetén a kapott $r_1(i)$, $r_2(i)$, $i = tk, \dots, tv$ kapott értékeit egymáshoz viszonyítva vizsgáljuk. Azaz $(x_2 - x_1)$ -et viszonyítjuk $(y_2 - y_1)$ -hez és $(z_2 - z_1)$ -hez, melyet kirajzolva:



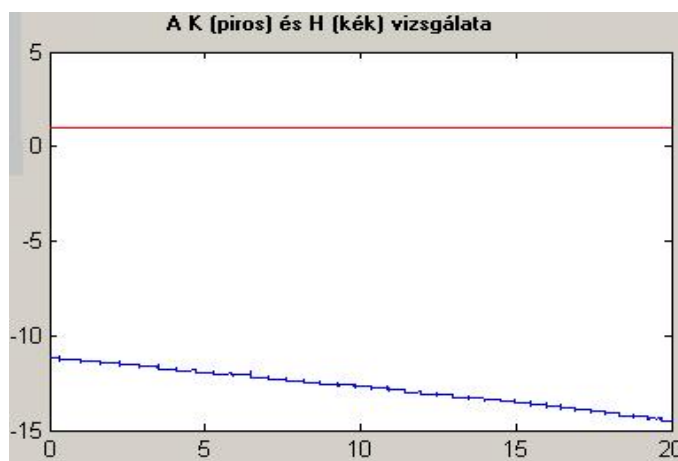
3. ábra Egymáshoz viszonyított relatív mozgás

ábrát kapjuk. Időhöz viszonyítva pedig:



4. ábra Időhöz viszonyított relatív mozgás

A helyes integrálás ellenőrzése végett ábrázoltam a mozgás állandókat. Az energia állandó $H = \frac{p_{x_1}^2 + p_{y_1}^2 + p_{z_1}^2}{2 \cdot m_1} + \frac{p_{x_2}^2 + p_{y_2}^2 + p_{z_2}^2}{2 \cdot m_2} - \frac{G m_1 m_2}{r^3}$; kézzel látható, mely majdnem (számítások finomítására van még szükség) állandóságot mutat a mozgás, ideje alatt, mint ahogyan a $K = (x_1 \cdot p_{y_1}) - (y_1 \cdot p_{x_1}) + (x_2 \cdot p_{y_2}) - (y_2 \cdot p_{x_2})$ állandósága látszik:



5. ábra Állandók vizsgálata a mozgás ideje alatt

A program természetesen még fejlesztés alatt áll, szeretnék pontosabb pályákat meghatározni, jobban közelíteni az üstökösök valódi pályáját, hisz az kirajzolt ellipszisek (spirálok) csak egy bizonyos időintervallumon illeszkednek a valódi pályára.

Irodalomjegyzék

- [1] Érdi Bálint: *Égi Mechanika*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1996
- [2] Dr. Wodetzky József: *Üstökösök*. Királyi magyar természettudományi társulat, Budapest, 1910
- [3] Patrik Martinez *The Observers Guide to Astronomy*. Cambridge University, 1994
- [4] Kulin György: *A távcső világa*. II. Kötet, Móra Kiadó, Budapest, 1941
- [5] Szenkovits Ferenc: *Csillagászat*. BBTE előadás, Kolozsvár, 2006
- [6] Szenkovits Ferenc: *Égi mechanika*. BBTE előadás, Kolozsvár, 2007
- [7] http://astro.elte.hu/icsip/egi_mechanika/kettest_problema
- [8] <http://emc.elte.hu/hargitai/>
- [9] <http://indykfi.phys.klte.hu/kisfiz/JARDANYB/solarsys/ustokos/index.htm>
- [10] http://hu.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss#.C3.89lete_fiatalkora_.C3.A9s_.C3.B6regkora_k.C3.B6z.C3.B6tt
- [11] <http://www.folder.hu/cikkek.php?id=48>
- [12] <http://www.cab.u-szeged.hu/local/naprendszer/>