Tartalomjegyzék

1. Bevezető

1.1. A Fibonacci számok és az aranymetszési állandó

1. ábra: Fibonacci

Fibonacci, hivatalos nevén Leonardo Pisano *(1. ábra)*, a *Liber Abaci* című könyvében egy olyan feladatot vetett fel, amelynek megoldása egy rekurzív számsorozat. Ezt a sorozatot Fibonacci-sorozatnak nevezzük és minden eleme – az első kettő kivételével – egyenlő az előző két elem összegével. A sorozat gyakran megjelenik a tudomány különböző területein, mint a geometria, biológia, művészet és építészet [1]. Például, azt, hogy egy növény esetében a száron felfelé haladva hány csavarulat mentén hány levelet érintve jutunk el egy olyanhoz, amely egy alsóbb levéllel függőleges irányban fedőhelyzetben van, a Fibonacci-sorozat mutatja meg [5]. A mandulafa ágán valamelyik levélből kiindulva és az ág vége felé haladva, egyetlen levelet sem kihagyva, éppen ötször kell megkerülni az ágat, míg olyan levélhez érkezünk, amely a kiindulási levéllel azonos állású, és közben éppen 13 levelet számlálhatunk meg. A körtefa ágain három-menetes e csavar és eközben 8 levél helyezkedik el. Az égerfa ágain kétmenetes a csavar és közben 5 levél található. A számok éppen a Fibonacci-sorozat olyan elempárjai, amelyek második szomszédok. Említésre méltó a napraforgó tányérján spirális alakban elhelyezkedő magok száma is. Az egyes spirálok pozitív, mások negatív forgásirányban helyezkednek el a napraforgó tányérjában, és ha összeszámláljuk az egyes spirális karokon levő szemeket, a napraforgó tányérjának nagyságától függően, újra csak Fibonacci-számokkal találkozunk: 21 és 34, 34 és 55 vagy 55 és 89 [6].

A matematikusok nagyon sok érdekes összefüggést fedeztek fel a számsorozatot tanulmányozva.

1.1. Értelmezés. A Fibonacci-sorozat a következő képpen értelmezhető:

$$F_0 = 0\,, \qquad F_1 = 1\,, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n+1} \quad \forall n \geqslant 2.$$

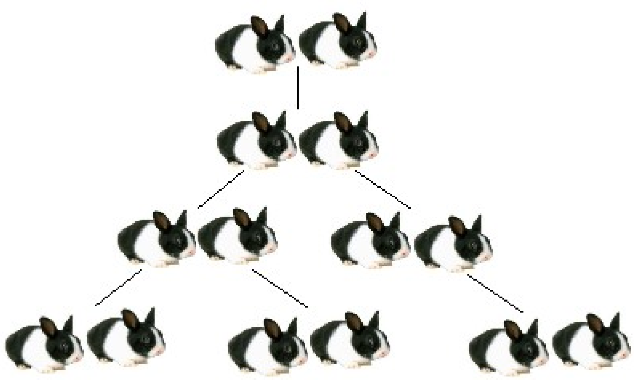
A Fibonacci-sorozat néhány tagja:

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377,\ 610,\ldots$$

Fibonacci, *a Liber Abaci* című könyvében, a következő feladattal vezette be a Fibonacci-számokat:

Egy mezőn él egy pár kisnyúl. Ha a kisnyulak egy hónap múlva válnak felnőtté, és minden felnőtt nyúlpárnak havonta születik egy pár kisnyula, akkor hány nyúl lesz a mezőn n hónap múlva?

Megoldás. Az első hónap végén csak egy pár nyúl van. Két hónap múlva két pár nyúl lesz, az egyik ezek közül újszülött. A harmadik hónap végén az eredeti párnak megszületik a második pár kisnyula, így most már három pár van a mezőn *(2. ábra)*. A negyedik hónap végén a legidősebb párnak újabb kicsinyei lesznek, és a második hónapban született nyúlpárnak is megszületnek az első kisnyulai, így összesen már 5 pár nyuszi van. Így folytatva a gondolatsort, megfigyelhető, hogy a megoldást éppen a Fibonacci-sorozat n-edik tagja adja meg.



2. ábra: Fibonacci nyulai

Hónap	1	2	3	4	5	6	...	n
Nyúlak száma	1	1	2	3	5	8	...	F_n

A Fibonacci-sorozat szoros kapcsolatban van az aranymetszéssel. Az aranymetszési állandó pontosan megegyezik a sorozat egymást követő elemei hányadosának a határértékével. Ezt az állandót a görög *phi* betűvel jelöljük és értéke $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398874989\ldots$.

1.2. Binet-formula

Jacques Philippe Marie Binet (1786 – 1856) francia matematikus volt, aki jelentős eredményeket ért el a számelméletben Az ő nevéhez fűződik a Binet-formula, amely egy explicit előállítása a Fibonacci-számoknak az aranymetszés segítségével.

1.1. Tétel. $\forall n \in \mathbb{N}$ természetes számra

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Ez a formula a Fibonacci-sorozat zárt alakja és *Binet-formulának* nevezzük.

Bizonyítás. Adott a Fibonacci-sorozat:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \;, \qquad F_0 = 0 \;, \qquad F_1 = 1 \;.$$

Határozzuk meg a sorozat r^n $(r \neq 0)$ alakú megoldásait. Legyen

$$F_{n+2} = r^{n+2} \;, \qquad F_{n+1} = r^{n+1} \;, \qquad , F_n = r^n \;, \qquad r \neq 0 \;.$$

Ekkor, behelyettesítve az egyenletbe, a következőt kapjuk:

$$r^{n+2} - r^{n+1} - r^n = 0 \;.$$

r^n -nel egyszerűsítve az $r^2 - r - 1 = 0$ karakterisztikus egyenletet kapjuk, amelynek a megoldásai:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \;, \qquad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \;.$$

Az $r_1{}^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ és $r_2{}^n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ megoldások lineáris kombinációja is megoldása az egyenletnek, vagyis: $F_n = A r_1{}^n + B r_2{}^n$.

A kezdeti feltételekből $(F_0 = 0 \;, F_1 = 1)$ meghatározhatjuk *A*-t és *B*-t:

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) &= 1 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{5}}{5} \\ B &= -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

Ebből következik a Binet-formula:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]. \qquad \square$$

1.2. Tétel. Igazolható, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi \ ,$$

ami pontosan az **aranymetszési állandó.**

Bizonyítás: $$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 0}{1-0} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ . \qquad \square$$

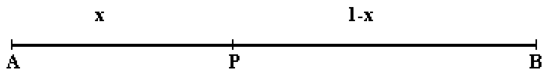
1.1. Következmény. A Binet-formulából következik, hogy az F_n elég nagy *n* természetes szám esetén közel van a $\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$ irracionális számhoz.

Példa: $F_{10} = 55$ esetén $\frac{\phi^{10}}{\sqrt{5}} \approx 55.00364$.

1.3. Az aranymetszési állandó a geometriában

Az aranymetszésnek igen nagy jelentősége van a geometriában. Euklédeszi úton megszerkeszthetjük az aranymetszés arányát. Az érték megjelenik az egyenlőszárú háromszög és a szabályos ötszög szerkesztésénél, és a Fibonacci-spirállal is kapcsolatos.

Geometriában aranymetszésnek nevezzük egy mennyiség (pl. egy szakasz) két olyan részre bontását, melyek közül a kisebbik úgy aránylik a nagyobbhoz, mint a nagyobbik az egészhez.



3. ábra: Aranymetszés aránya

Vegyünk egy egységnyi hosszúságú *AB* szakaszt és jelöljük *P*-vel az aranymetszés szerinti osztópontot, *x*-szel pedig a rövidebb szakasz hosszát *(3. ábra)*.

Ekkor felírhatjuk:

$$\frac{x}{(1-x)}=\frac{(1-x)}{1} \ ,$$

ahonnan

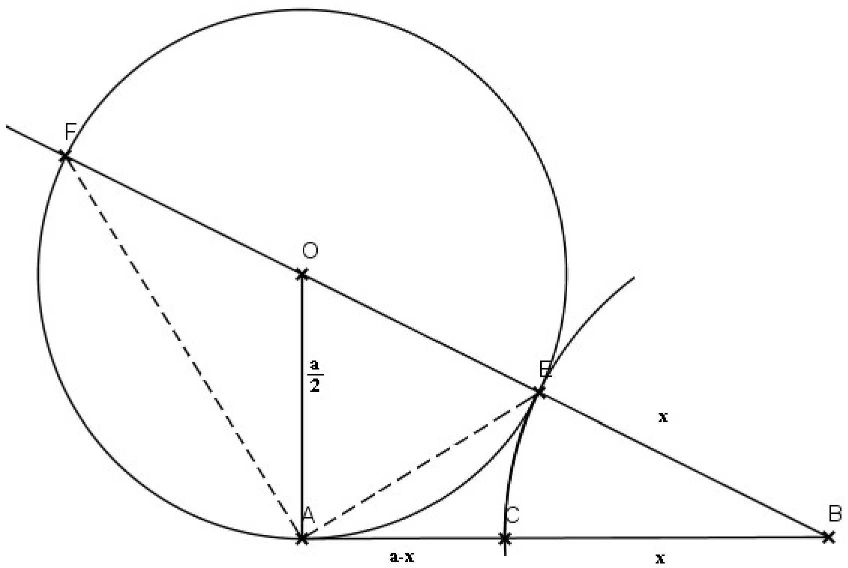
$$(1-x)^2=x \ , \quad \text{azaz} \quad x^2-3x+1=0 \ .$$

A gyökök: $x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. De $x<1$, tehát: $x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Innen az aranymetszés arányszáma: $\dfrac{1-x}{1}=1-x=1-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Ez az arányszám pontosan megegyezik a Fibonacci-sorozat szomszédos elemei hányadosának határértékével.

Most vizsgáljuk meg, hogyan lehet megszerkeszteni euklédeszi úton az aranymetszés arányát. A *4. ábrán* látható *AB=a* hosszúságú szakasznak azt a belső *C* pontját szeretnénk megszerkeszteni, amely a szakaszt az aranymetszés szerint osztja két részre.



4. ábra: Aranymetszés szerkesztése

Első lépésként vegyünk fel egy, az A ponton átmenő, az AB egyenesre merőleges egyenest, és mérjünk fel erre az A pontból kiindulva $OA=\frac{a}{2}$ távolságot. Ennek O végpontja, mint középpont körül rajzoljunk egy $\frac{a}{2}$ sugarú kört. E körnek az A ponthoz tartozó érintője az AB egyenes. Rajzoljuk meg az OB egyenest. Ennek a körrel való metszéspontjai E és F. Az A pontot az E és F pontokkal összekötve a BAE és BAF háromszögeket kapjuk. A két háromszög hasonló, mivel a B csúcsnál levő szög közös, továbbá $BAE\sphericalangle=BFA\sphericalangle$ (kerületi szögek).

Jelöljük a BE szakasz hosszát x-szel és rajzoljuk meg a B középpontú, x sugarú kört. Az AB szakasz és a kör metszéspontját jelöljük C-vel.

A BF szakaszra érvényes a következő összefüggés: $BF=x+2\cdot\frac{a}{2}=x+a$.

Felírhatjuk a következő aránypárt:

$$\frac{x}{a}=\frac{a}{x+a} ,$$

ahonnan $a^2=x^2+a\,x$, vagy másképpen $\frac{a-x}{x}=\frac{x}{a}$.

A kapott egyenlőség éppen azt fejezi ki, hogy az AB szakasznak a C pont az aranymetszés szerinti osztópontja, úgy, hogy AC az aranymetszés szerinti kisebbik, BC pedig a nagyobbik szakasz.

2. Probléma megfogalmazása

Egy olyan alkalmazás, amely magába foglalja az említett geometriai szerkesztéseket nyereség lenne azok számára, akiket érdekel a Fibonacci-sorozat és a rejtélyes aranymetszési állandó. Ebből az ötletből kiindulva sikerült elkészíteni egy olyan Flash-alkalmazást, amely röviden ismerteti a felhasználóval Fibonacci életét és munkásságát, továbbá meglehet tekinteni a Fibonacci-számok bevezető feladatát. Az alkalmazás egyik legértékesebb része az aranymetszés arányának megszerkesztése és a Fibonacci-spirál létrehozása. Ezek látványos, dinamikus módon történnek, lépésről-lépésre követhetően. A cél egy minél több geometriai szerkesztést tartalmazó oktatóprogram, amelyet sikerrel lehessen használni a tanításban.

3. Informatikai módszer

Az Adobe Flash multimédia technológiák halmaza. Az Adobe Systems termékcsaládba tartozik és egyre többen használják az alkalmazást weboldalak fejlesztésére. A Flash alkalmas animáció és interaktív adatok beszúrására, ezáltal érdekessé és látványossá téve a weboldalakat, illetve újabb fejlesztések segítségével programokat is lehet benne írni. A grafikák, az animáció, a hang és az interaktivitás segítségével a Flash képes oktatni, szórakoztatni és általános információkkal ellátni bennünket.

Az Adobe Flash CS3 verziót használva, amit 2007-ben adtak ki, elkészült egy olyan alkalmazás, amely a Fibonacci-számokat és az aranymetszési állandót mutatja be a felhasználónak. Az alkalmazás tartalmaz geometriai szerkesztéseket is, amelyek rámutatnak az aranymetszés jelentőségére és érdekességére. Az alkalmazás felépítése lehetővé teszi, hogy a felhasználó gombnyomással irányítsa a szerkesztések folyamatát, ez a tulajdonság könnyebben követhetővé és átláthatóvá teszi a programot.

3.1. Alkalmazás bemutatása

Az alkalmazást elindítva, a bevezető oldalon látható Fibonacci arcképe és, animációt használva, folyamatosan megjelenik az olasz matematikus életéről és munkásságáról szóló rövid ismertető szöveg *(5. ábra)*.

5. ábra: Első oldal

A *Fibonacci* nevű oldalt követően, a felhasználó megtekintheti a Fibonacci „nyulairól" szóló bevezető feladatot. A *Bevezető feladat* című oldal tartalmazza a feladat szövegét, megoldását és egy animált ábrát is *(6. ábra)*. A *Tovább* gombra kattintva, az ábra nagyobb méretben is megtekinthető és könnyen követhető rajta a párhuzam a nyulak szaporodása és a Fibonacci-sorozat elemei között.

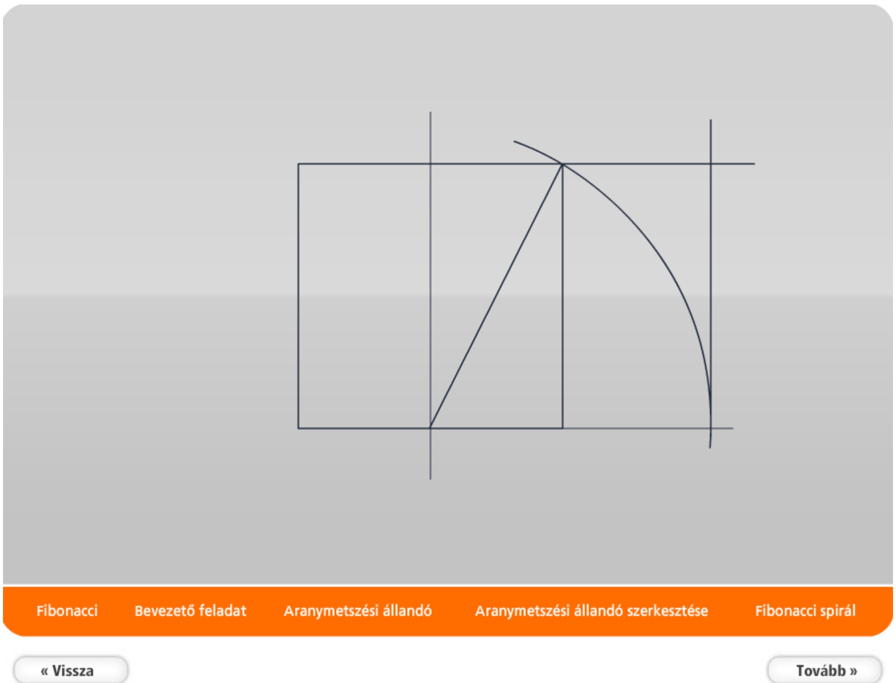
6. ábra: Második oldal

Ezek után következik az aranymetszési állandó bemutatása. Az aranymetszés arányai felfedezhetők az ókori építészetben, reneszánsz művészeti alkotásokban, zeneművekben, festményekben, sőt, még a természetben is előfordulnak egyes csigafajták görbületeinek egymáshoz való viszonyában, bizonyos fák, növények leveleinek méreteiben, egyes virágfajták sziromleveleinek számában [6]. Ugyanakkor tudjuk, hogy az érték szoros kapcsolatban áll a Fibonacci-sorozattal, hiszen a sorozat egymást követő elemei hányadosának a határértéke pontosan az aranymetszési állandó:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi\ .$$

Mindez megtalálható az *Aranymetszési állandó* nevű oldalon.

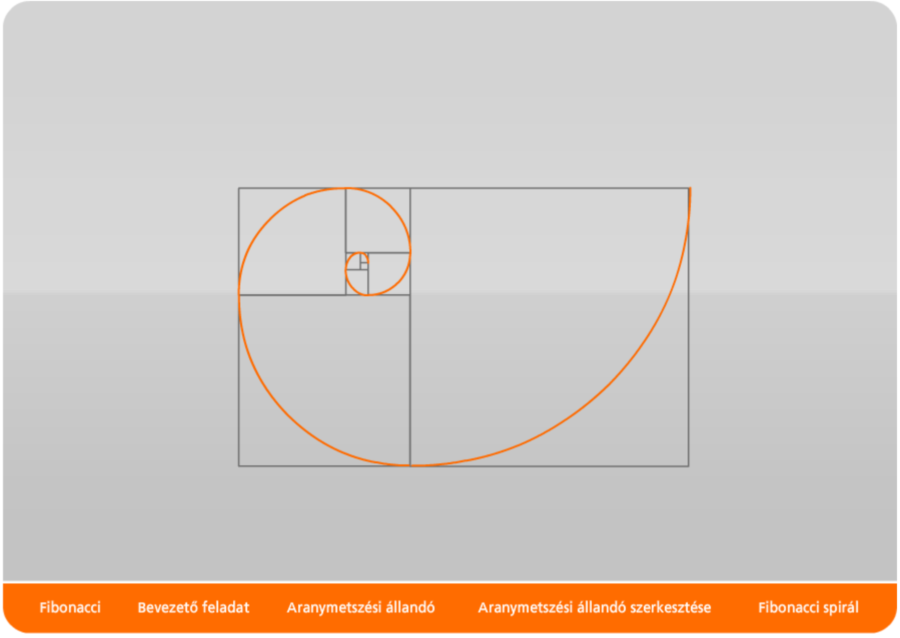
Az *Aranymetszési állandó szerkesztése* nevű oldal bemutatja lépésről-lépésre, hogyan kell egy téglalapot az aranymetszés arányai szerint felosztani *(7. ábra)*. A szerkesztés a *Vissza* és *Tovább* gombokkal irányítható.



7. ábra: Negyedik oldal

A szerkesztés végére érve, az ábra szemlélteti, hogy a kisebbik téglalap úgy aránylik a nagyhoz, mint a nagyobbik az egészhez, animáció segítségével.

Az alkalmazás egyik legérdekesebb szerkesztése a Fibonacci spirál. Ezen az oldalon követhető a Fibonacci-számoknak megfelelő oldalhosszúságú négyzetek egymás mellé helyezése, és azoknak a köríveknek a megrajzolása, amelyek alkotják a Fibonacci spirált *(8. ábra)*. A felhasználó itt is befolyásolhatja a szerkesztés lépéseit a *Vissza* és *Tovább* gombokkal.



8. ábra: Ötödik oldal

A .fla kiterjesztés Flash animáció. Tartalmaz fő-kulcsképeket, al-kulcsképeket, gombokat és Actionscript-et. A fő-kulcsképek filmkockaként működnek, míg az al-kulcsképek az animáció átmeneti kockái. A gombok egyszerű két fázisos gombanimációk: ha ráhelyezzük az egér mutatóját, beugranak a saját al-kulcsképjeikbe, amelyben ugyanaz a gomb található, csak narancssárga színű felirattal. Minden gombra Actionscript van téve, segítségével navigálhatunk bizonyos témákra. A Flash lineáris, olyan mint a Program Counter, mindig valahol található, ezért irányítani kell.

A fő témák meglettek rajzolva, fő-kulcsképekre lettek téve, és ha animációról volt szó, akkor az animáció al-kulcsképek segítségével lett megvalósítva. Például, az *Aranymetszési állandó szerkesztése* nevű oldalon megrajzoljuk a szerkesztés első képét (a négyzetet), ez a fő-kulcsképre kerül, majd a *Tovább* gomb elvisz a következő kulcsképre, ahol a szerkesztés elmozdult fázisa található.

4. Eredmények

Az eredmény egy olyan oktatóprogram, amely látványos, dinamikus és hatásos. Az alkalmazást használhatják tanárok, diákok és minden olyan felhasználó, akit érdekel a Fibonacci-sorozat, az aranymetszési állandó, és a különböző geometriai szerkesztések.

5. További célok

További cél az alkalmazás kibővítése olyan geometriai szerkesztésekkel, amelyek érdekesek, és számos felhasználót érdekelnek. Mivel az alkalmazás tartalmaz úgy az informatika, mind pedig a matematika területén tanított anyagrészt, ezért, megfelelő módosításokkal, oktatóprogramként is kezelhető.

6. Irodalomjegyzék

[1] **Bege Antal**, *Differenciaegyenletek,* Egyetemi Kiadó, Kolozsvár, 2005.

[2] **Bui Minh Phong**, *Perfect Numbers Concerning Fibonacci Sequence,* Eötvös Loránd Tudományegyetem, Budapest, 1999.

[3] **Fibonacci Numbers**,

http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html

[4] **Fibonacci Spirals**,

http://goldennumber.net/spirals.htm

[5] **Fodorpataki László, Szigyártó Lídia, Bartha Csaba***, Növénytani ismeretek,* Scientia Kiadó, Kolozsvár, 2004, 138 – 142.

[6] **Gerőcs László***, A Fibonacci-sorozat általánosítása,* Scolar Kiadó, Budapest, 1998.

[7] **Jean Berstel**, *An Exercise on Fibonacci Representation,* Gaspard Monge Intézet, Marne -la-Vallée, 2002.

[8] **Peter Fenwick**, *Zeckendorf Integer Arithmetic*, The University of Auckland, Auckland.

[9] **Sain Márton,** *A Fibonacci-sorozattól lánctörtekkel az aranymetszésig,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1975, 77 – 106.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek: Bege Antalnak, segítsége és biztatása nélkül nem jöhetett volna létre e dolgozat.

Köszönöm Fodorpataki Lászlónak a hasznos segédanyagot.

Köszönöm Keresztes Zsoltnak és Negulescu Mátyásnak türelmét és hasznos tanácsait.